

LAURO SAMOJEDEN

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO DE STRINGS
CÓSMICOS ACOPLADAS ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA
DEZ/87



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

ATA DA DEFESA DA TESE DE MESTRADO DE LAURO LUIZ SAMOJEDEN

Em sessão pública de defesa de tese iniciada às 14:00 horas, nesta data, após seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 09 de dezembro de 1987.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Edson Stédile
Presidente - UFPR

Prof. Ruben Mondaini

Prof. Luiz Eduardo S. Machado

Para

Yonara Cristina,

fiel companheira de todas

as horas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Edson Stédile pela assistência e por me introduzir no estudo da Relatividade Geral.

Quero agradecer também aos professores Germano B. Afonso, Liu Kai e Cristiano J. Graf pelos incentivos.

Agradeço ainda ao colega Sergio L.M. Berleze pela valiosa ajuda em computação eletrônica.

À Universidade Federal do Paraná pelos recursos técnicos e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Mostramos neste trabalho que as equações de campo de strings cósmicos, acopladas às equações de Einstein, possuem soluções numéricas as quais são válidas nas proximidades do string. Discutimos as propriedades das soluções encontradas e mostramos que para $\rho \rightarrow \infty$ o espaço-tempo, em presença do string, aproxima-se do espaço-tempo de Minkowski, a menos de uma cunha. Obtivemos, finalmente, uma expressão para o desvio angular da luz pelo string.

ABSTRACT

We point out in this work that the field equations for cosmics strings, coupled to Einstein's equations, have numerical solutions and that they have validity near of the string. We discuss some properties of these solutions and in the limit $\rho \rightarrow \infty$, the spacetime in presence of strings approaches Minkowski spacetime minus a wedge. Finally, we derive an expression for the angular deflection of the light by the string.

ÍNDICE

I	INTRODUÇÃO E CONCEITOS GERAIS DA	
	TEORIA DE STRINGS.....	01
II	STRINGS CÓSMICOS NO ESPAÇO-TEMPO	
	DE MINKOWSKI.....	06
II.1	Análise de uma Formulação Lagrangeana.....	06
II.2	Tensor Energia-momentum.....	12
III	STRINGS CÓSMICOS NO ESPAÇO-TEMPO CURVO.....	15
III.1	Definição da Métrica e da base ortonormal.....	15
III.2	Determinação do tensor energia-momentum.....	18
III.3	As Equações de Einstein.....	19
III.4	Equações de movimento.....	21
IV	LEIS DE CONSERVAÇÃO E ANÁLISE DAS SOLUÇÕES	
	DAS EQUAÇÕES DE CAMPO.....	26
IV.1	Leis de Conservação	26
IV.2	O Desvio Angular ao e o "Efeito Lente".....	33
	CONCLUSÃO.....	38
	APÊNDICE A.....	39
	Apêndice A.1	39
	Apêndice A.2.....	42
	Apêndice A.3	45
	Apêndice A.4.....	60
	APÊNDICE B.....	64
	Apêndice B.1.....	64
	Apêndice B.2	66

Apêndice B.3.....	68
Apêndice B.4.....	71
Apêndice B.5.....	75
Apêndice B.6.....	78
APÊNDICE C.....	84
Apêndice C.1.....	84
Apêndice C.2	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	90

I - INTRODUÇÃO E CONCEITOS GERAIS

DA TEORIA DE STRINGS

"Nada é mais fundamental do que isto: o espaço vazio não é vazio; pelo contrário, nele se desenrola a física mais violenta."

John A. Wheeler

Na década de 1940, P.A.M. Dirac publicou sua teoria do eletromagnetismo com monopolos (cargas magnéticas). Nesta teoria Dirac propôs que o potencial-vetor, que descreve o campo de um monopolo é singular ao longo de uma corda ou, como no original, ao longo de um string. Foi assim que se começou a falar em strings na Física. Os strings, da teoria de Dirac, não continham nenhuma realidade física, pois não transportavam energia e, além disso, todos os observáveis da teoria eram independentes dos seus movimentos [1].

Alguns anos mais tarde, Y.Nambu [2] fez alterações na teoria de Dirac, dando uma realidade física aos strings. Ele construiu um modelo onde as cargas magnéticas eram unidas aos pares por strings. Este trabalho se originou da idéia de que os strings poderiam ser pensados como um modelo matemático de um fluxo magnético tubular em equilíbrio, sob a pressão de um meio superfluido e carregado (um campo escalar de Higgs), ini-

cialmente sugerido por H.Nielsen. Assim, se o string fosse aberto, as linhas de fluxo magnético iniciariam e terminariam em suas pontas, dando lugar a um par de cargas magnéticas. Com esta formulação procurava-se uma explicação para os quarks, sendo estes fontes de monopolos magnéticos. Os strings estariam unindo um quark a um antiquark, não ocorrendo quarks livres, porque seria preciso uma energia infinitamente grande para afastá-los indefinidamente. Mas muito antes de se fornecer uma quantidade infinita de energia ocorre outro fenômeno. A energia que se fornece ao distender o string pode converter-se em matéria sob a forma de um par quark-antiquark. Este par é criado a partir do vácuo, porque existe energia suficiente para produzi-lo.

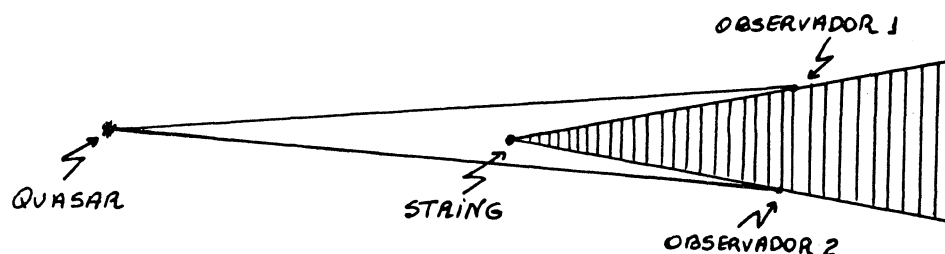
Além disso, os strings estariam relacionados com os hadrons, apesar de não haver ainda nenhuma prova concreta deste fato. Acredita-se que os quarks sejam os tijolos pelos quais os hadrons são construídos, e que a ligação entre um quark e um antiquark se deva a um campo vetorial não-abeliano, comumente denominado de campo de gluons. Desta forma os strings seriam uma materialização destes campos, já que há indicações de que tais campos estão concentrados sob a forma de tubos estreitos entre um quark e um antiquark.

A Teoria dos strings está hoje bem desenvolvida e pode ser utilizada tanto clássica como relativisticamente. Estuda-se, atualmente, os strings e suas interações com os campos eletromagnético e gravitacional. Strings desta natureza são comumente chamados de strings cósmicos.

Estes, quando estáveis, aparecem naturalmente como

consequência da quebra espontânea de simetria, em teorias grandes - unificadas. É interessante a idéia de que tais strings cósmicos, formados por uma transição de fase no início do universo, serviram como embriões para as primordiais flutuações de densidade, estas responsáveis pela estrutura da larga escala do universo. Tal idéia, proposta originalmente por Zel'dovich [3] e Vilenkin [4], está apoiada na suposição de que na era da radiação, os strings evoluíram de tal modo que o seu comprimento e sua densidade eram somente funções das dimensões do horizonte.

A produção de strings cósmicos, numa transição de fase, nos instantes iniciais do Universo, foi estudada por Kibble, Lazarides e Shafi [5]. Mais tarde Vilenkin [6] propôs uma explicação para os quasares duplos, utilizando strings cósmicos. Segundo ele, o campo gravitacional do string atua como uma espécie de lente gravitacional. Este efeito é análogo ao efeito Bohm-Aharonov do eletromagnetismo [7], o qual sugere que partículas forçadas a se mover numa região onde o tensor de Riemann é nulo, podem, entretanto, exibir efeitos físicos devidos à curvatura não nula na região da qual elas são excluídas. A curvatura do espaço-tempo se deve ao núcleo do string, mas o seu efeito é "sentido" por fótons, que se propagam numa região do espaço-tempo plano, ao seu redor. Como no caso Bohm-Aharonov, um sistema de coordenadas Minkowskiano pode ser escolhido em uma região muito afastada do string, mas tal sistema não pode existir em regiões próximas ao string. O esquema proposto por Vilenkin, para o efeito lente-gravitacional é mostrado no diagrama a seguir.



De acordo com ele, a geometria no exterior de um string, com densidade de energia uniforme, é cônica, quando comparada ao espaço-plano, ocorrendo um desvio angular proporcional à densidade de massa do string. Garfinkle^[8] trata o string no caso geral como uma auto-interação de um campo escalar, com acoplamento minimal a um campo de gauge, e mostra que há uma classe de soluções estáticas e cilindricamente simétricas, para as equações destes campos. Tais soluções se aproximam assintoticamente do espaço de Minkowski, exceto por uma cunha, definida pelo mesmo desvio angular citado acima.

Os strings cósmicos podem, sob certas circunstâncias, formar buracos-negros pelo colapso de strings fechados.

Vale lembrar o trabalho de Q.Tian^[9] o qual menciona que a constante cosmológica Λ pode ter tido, no passado, um valor da ordem de 10^{120} vezes maior do que no presente. Isto responde à questão referente ao desvio angular, o que é uma característica da métrica do espaço-tempo de um string cósmico.

Mas este assunto não pára aí. Vilenkin analisa ainda outros efeitos cosmológicos, que tiveram suas origens nas transições de fase, no início do Universo, e que são: as estruturas de domínios (paredes); strings mais complexos; strings globais; monopolos; monopolos conectados por strings e estru-

ras limitadas por strings.

Nosso trabalho é baseado no desenvolvido por Garfinkle, já citado. Aqui mostramos que as equações acopladas para os campos, tanto no espaço-tempo plano como no espaço-tempo curvo, possuem soluções numéricas e que estas são válidas nas proximidades do string.

No segundo capítulo tratamos das equações de campo no espaço de Minkowski, onde apresentamos a solução numérica destas equações. Desenvolvemos também as componentes do tensor energia-momentum em coordenadas cilíndricas, e mostramos que só existem as componentes diagonais deste tensor.

No terceiro capítulo tratamos das equações de campo, acopladas à equação de Einstein. Novamente consideramos coordenadas cilíndricas e escolhemos a métrica como sendo

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\phi^2 + d\rho^2$$

onde, A, B e C são funções somente de ρ . Mostramos que, neste caso, o tensor energia-momentum também é diagonal. Obtivemos uma solução numérica para as equações de campo. Garfinkle apenas propôs, neste caso, a existência de uma solução, sem contudo mostrá-la. Este problema foi resolvido recentemente por P. Laguna-Castilho e R.A. Matzner [14].

No último capítulo discutimos as propriedades das soluções encontradas. Mostramos que para grandes distâncias ($\rho \rightarrow \infty$), o espaço-tempo em presença do string aproxima-se do espaço-tempo de Minkowski, a menos de uma cunha. Obtivemos, finalmente, uma expressão para o desvio angular da luz pelo string. Este resultado concorda com a previsão feita por Vilenkin e Gott [10].

II - STRINGS CÓSMICOS NO ESPAÇO-TEMPO

DE MINKOWSKI

"o esforço para a compreensão do Universo é uma das muito poucas coisas que elevam a existência humana, um pouco acima do nível da farsa, e lhe dão algo do encanto da tragédia."

Steven Weinberg

II. 1 - ANÁLISE DE UMA FORMULAÇÃO LANGRANGEANA

Seja A_a um campo vetorial e ψ um campo escalar complexo, definido por

$$\psi = R e^{i\phi}, \quad (\text{II.1-1})$$

onde R e ϕ são reais, e tomemos a equação de Klein - Gordon [11] para o campo

$$(\partial_a \partial^a + m^2) \psi = 0 \quad (\text{II.1-2})$$

Adotaremos um sistema de unidades tal que, $\hbar = c = G = 1$. No caso sem massa a equação (II.1-2) fica

$$\partial_a \partial^a \psi = 0 \quad (\text{II.1-3})$$

Para preservar a invariância da Lagrangeana temos que considerar os operadores

$$\begin{aligned}
D_a &= (\partial_a - iq A_a), \\
D^a &= (\partial^a + iq A^a),
\end{aligned}
\tag{II.1-4}$$

onde q representa uma carga.

Em termos do campo escalar ψ teremos a Lagrangeana

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \partial_a \psi^* \partial^a \psi,
\tag{II.1-5}$$

que, em face das relações (II.1-4), torna-se

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} (\partial_a - iq A_a) \psi^* (\partial^a + iq A^a) \psi.$$

Substituindo ∂_a e ∂^a por ∇_a e ∇^a respectivamente e considerando a definição (II.1-1) teremos para esta Lagrangeana,

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \left[\nabla_a \psi \nabla^a \psi + R^2 (\nabla_a \psi + iq A_a \psi) (\nabla^a \psi + iq A^a \psi) \right].
\tag{II.1-6}$$

A Lagrangeana do eletromagnetismo é

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab},
\tag{II.1-7}$$

onde F_{ab} é o campo eletromagnético, invariante por uma transformação de gauge, e dado em termos do potencial-vetor A_a por

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a.$$

Podemos também ter uma Lagrangeana proporcional à segunda e quarta potências do campo escalar ϕ , a saber

$$\mathcal{L}_3 = -\lambda (\phi^4 - 2\eta^2 \phi^2 + \eta^4) = -\lambda (R^2 - \eta^2)^2
\tag{II.1-8}$$

onde λ e η são constantes arbitrárias.

Com as Lagrangeanas (II.1-6), (II.1-7) e (II.1-8) podemos escrever uma Lagrangeana total, que considere as interações mencionadas, isto é,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3,$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left[\nabla_a R \nabla^a R + R^2 (\nabla_a \phi + g A_a) (\nabla^a \phi + g A^a) \right] - \\ & - \frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab} - \lambda (R^2 - \eta^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{II.1-9})$$

Tomemos as equações de Euler-Lagrange

$$\nabla^c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c \Lambda)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = 0, \quad (\text{II.1-10})$$

onde Λ representa os campos da Lagrangeana (II.1-9). Para $\Lambda = R$ temos, conforme o apêndice A.1,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = -R (\nabla_a \phi + g A_a) (\nabla^a \phi + g A^a) - 4\lambda R (R^2 - \eta^2),$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c R)} = -\nabla_c R,$$

logo

$$\nabla^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^a R)} = -\nabla^a \nabla_a R.$$

Desta forma

$$\nabla^a \nabla_a R - R [(\nabla_a \phi + g A_a)(\nabla^a \phi + g A^a) + 4\lambda(R^2 - \eta^2)] = 0. \quad (\text{II.1-11})$$

Para $\Lambda = 0$ temos, conforme o apêndice A.1,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

e

$$\nabla^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^a \phi)} = -\nabla^a [R^2 (\nabla_a \phi + g A_a)].$$

Desta forma

$$\nabla^a [R^2 (\nabla_a \phi + g A_a)] = 0. \quad (\text{II.1-12})$$

Para $\Lambda = A^b$ temos, conforme o apêndice A.1,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^b} = -R^2 g (\nabla_b \phi + g A_b),$$

e

$$\nabla^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^a A^b)} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^a F_{ab},$$

e portanto

$$\nabla^a F_{ab} - 4\pi g R^2 (\nabla_b \phi + g A_b) = 0 \quad (\text{II.1-13})$$

As equações (II.1-11), (II.1-12) e (II.1-13) são as equações de campo, correspondentes à Lagrangeana (II.1-9).

Usando o tempo usual e as coordenadas cilíndricas (z, ρ, ϕ) a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

em face das transformações abaixo,

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

fica

$$ds^2 = - dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (\text{II.1-14})$$

que é a conhecida métrica em coordenadas cilíndricas, onde

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = +1, \quad g_{22} = +1 \text{ e } g_{33} = \rho^2,$$

sendo g_{ab} as componentes do tensor métrico.

Assumiremos que os campos escalares R , ϕ e o campo de gauge, são da forma

$$\begin{aligned} \phi &= \phi \\ R &= R(\rho) \\ A_a &= \frac{1}{q} [P(\rho) - 1] \nabla_a \phi, \end{aligned} \quad (\text{II.1-15})$$

onde $P(\rho)$ é uma função arbitrária a ser determinada.

Com tais escolhas para os campos e substituindo (II.1-15) nas equações de campo, teremos que a equação (II.1-12) é completamente satisfeita e as equações (II.1-11) e (II.1-13) ficam, de acordo com o apêndice A.2,

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = R [4\lambda \rho^2 (R^2 - \eta^2) + \rho^2], \quad (\text{II.1-16})$$

e

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{-1} \frac{dP}{d\rho} \right) = 4\pi g^2 R^2 \rho. \quad (\text{II.1-17})$$

As equações (II.1-16) e (II.1-17) possuem três constantes arbitrárias λ , η e q . Podemos reduzir esta quantidade

de constantes fazendo

$$X \equiv \frac{R}{\eta}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\lambda} \eta \rho \quad e \quad \alpha \equiv \frac{4\pi g^2}{\lambda}. \quad (\text{II.1-18})$$

Com tais escolhas a equação (II.1-16) fica,

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \left(\kappa \frac{dX}{d\kappa} \right) = X \left[4\kappa^2 (X^2 - 1) + P^2 \right], \quad (\text{II.1-19})$$

e a equação (II.1-17) torna-se,

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \left(\kappa^{-1} \frac{dP}{d\kappa} \right) = \alpha X^2 P. \quad (\text{II.1-20})$$

A solução numérica das equações (II.1-19) e (II.1-20) é dada na figura 1, e os detalhes desta solução encontram-se no apêndice A.3

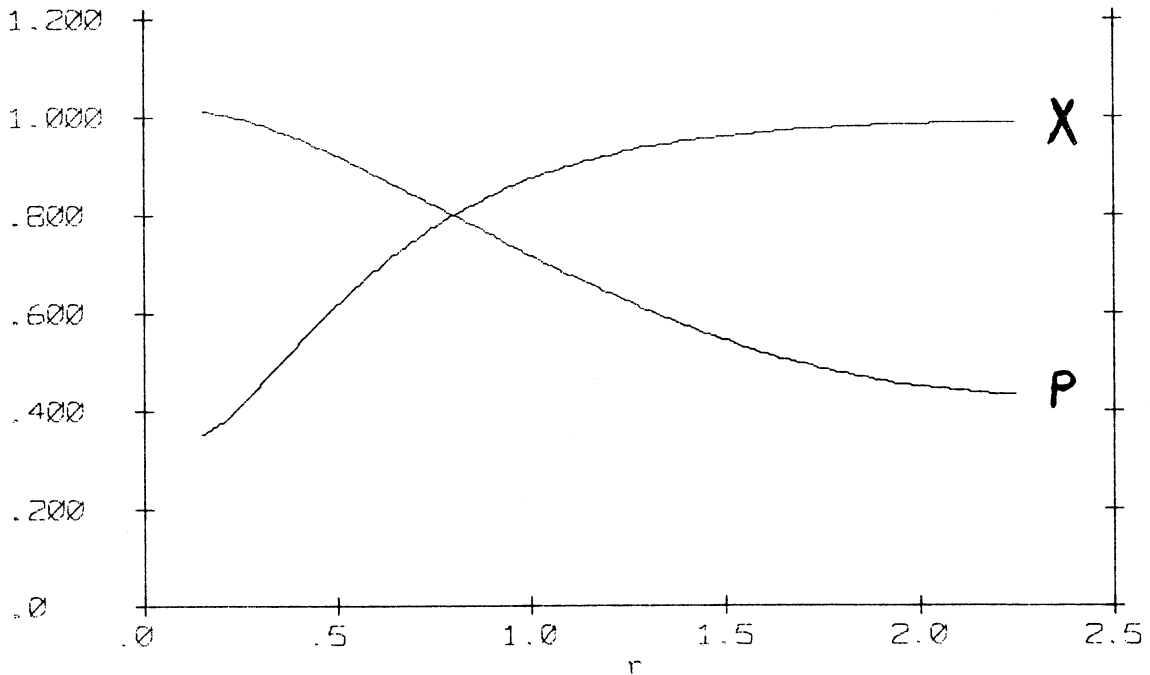


Figura 1 - Magnitudes dos campos escalar e de gauge.

Os resultados aqui obtidos mostram que X (campo escalar) não inicia na origem, pois aí há uma singularidade devido ao método computacional, para valores de r menores que 0,15, ver o apêndice A-3. Vale ressaltar que esta solução é válida somente nas vizinhanças do string.

Nas equações de movimento consideramos a constante arbitrária α como igual a 1.

II.2 - TENSOR ENERGIA - MOMENTUM

Com a densidade de Langrangeana (II.1-9) podemos obter as componentes do tensor energia-momentum, mediante

$$T_{ab} = \nabla_a \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b R)} - g_{ab} \mathcal{L},$$

onde \wedge representa os campos R , ϕ e A_a . Assim temos

$$T_{ab} = \nabla_a R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b R)} + \nabla_a \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b \phi)} + \nabla_a A^c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b A^c)} - g_{ab} \mathcal{L}.$$

Porém, de acordo com o apêndice A.1, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b R)} = - \nabla_b R,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b A^c)} = - \frac{1}{4\pi} F_{bc},$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^b \phi)} = -R^2 P^2 \nabla_b \phi.$$

Portanto

$$T_{ab} = -\nabla_a R \nabla_b R - \nabla_a \phi \nabla_b \phi R^2 P^2 - \frac{1}{4\pi} \nabla_a A^c F_{bc} - g_{ab} \mathcal{L},$$

mas

$$\nabla_a \phi \nabla_b \phi R^2 P^2 = R^2 (\nabla_a \phi + \varphi A_a) (\nabla_b \phi + \varphi A_b),$$

logo

$$T_{ab} = -\nabla_a R \nabla_b R - R^2 (\nabla_a \phi + \varphi A_a) (\nabla_b \phi + \varphi A_b) - \frac{1}{4\pi} \nabla_a A^c F_{bc} - g_{ab} \mathcal{L}.$$

As componentes F_{ab} satisfazem a condição

$$\partial_b F_{ab} = \frac{\partial F_{ab}}{\partial x^b} = 0$$

onde x^b representa as coordenadas (t, z, ρ, ϕ) . Podemos acrescentar ao terceiro termo do tensor energia-momentum a quantidade

$$\frac{1}{4\pi} \nabla^c (A_a F_{bc}),$$

e assim teremos

$$T_{ab} = -\nabla_a R \nabla_b R - R^2 (\nabla_a \phi + \varphi A_a) (\nabla_b \phi + \varphi A_b) - \frac{1}{4\pi} F_a^c F_{bc} - g_{ab} \mathcal{L},$$

ou, para que a densidade de energia seja positiva

$$T_{ab} = \nabla_a R \nabla_b R + R^2 (\nabla_a \phi + g A_a) (\nabla_b \phi + g A_b) + \frac{1}{4\pi} F_a^c F_{bc} + g_{ab} L, \quad (\text{II.2-1})$$

onde

$$L = -\frac{1}{2} \nabla^c R \nabla_c R - \frac{1}{2} R^2 (\nabla_c \phi + g A_c) (\nabla^c \phi + g A^c) - \frac{1}{16\pi} F^{cm} F_{cm} - \lambda (R^2 - \eta^2)^2.$$

Para os campos da forma (II.1-15), o tensor energia-momentum é diagonal nas coordenadas (t, z, ρ, ϕ) . Assim, de acordo com o apêndice A.4 temos,

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + R^2 \rho^2 \bar{\rho}^{-2} + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \bar{\rho}^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \quad (\text{II.2-2})$$

$$T_{11} = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + R^2 \rho^2 \bar{\rho}^{-2} + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \bar{\rho}^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \quad (\text{II.2-3})$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 - R^2 \rho^2 \bar{\rho}^{-2} - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \bar{\rho}^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \quad (\text{II.2-4})$$

$$T_{33} = \frac{1}{2} \rho^2 \left\{ -\left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + 2R^2 \rho^2 \bar{\rho}^{-2} \left(\bar{\rho}^{-2} \frac{1}{2} \right) - 2(R^2 - \eta^2)^2 \lambda + \frac{1}{2g^2 \pi} \bar{\rho}^{-2} \left(\bar{\rho}^{-2} \frac{1}{2} \right) \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \quad (\text{II.2-5})$$

onde as demais componentes são nulas. Desta forma podemos escrever o tensor energia-momentum como:

$$T_{ab} = T_{00} \nabla_a t \nabla_b t + T_{11} \nabla_a z \nabla_b z + T_{22} \nabla_a \rho \nabla_b \rho + T_{33} \nabla_a \phi \nabla_b \phi. \quad (\text{II.3-6})$$

III - STRINGS CÓSMICOS NO ESPAÇO-TEMPO CURVO

"É errado pensar que a tarefa da Física é descobrir como é a natureza. A Física ocupa-se daquilo que podemos dizer sobre a natureza."

Niels Bohr.

III.1 - DEFINIÇÃO DA MÉTRICA E DA BASE ORTONORMAL

Para analisar o caso de strings no espaço-tempo curvo, vamos novamente considerar os campos de gauge ϕ e A_a no caso estático. Vamos admitir que o tensor energia-momentum tem simetria cilíndrica. A métrica utilizada será estática e com simetria cilíndrica.

Consideremos, inicialmente, a métrica na forma

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\phi^2 + d\rho^2, \quad (\text{III.1-1})$$

onde A, B, e C são comente funções de ρ .

Na forma matricial, o tensor métrico será dado por

$$[g_{ab}] = \begin{pmatrix} -e^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.1-2})$$

para as componentes covariantes e

$$[g^{ab}] = \begin{pmatrix} -e^{-A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.1-3})$$

para as componentes contravariantes.

Tomemos agora uma base ortonormal, definida pelos vetores

$$\begin{aligned} \hat{t}^a &\equiv e^{-A/2} (\partial/\partial t)^a, \\ \hat{z}^a &\equiv e^{-B/2} (\partial/\partial z)^a, \\ \hat{\phi}^a &\equiv e^{-C/2} (\partial/\partial \phi)^a, \\ \hat{\rho}^a &\equiv (\partial/\partial \rho)^a. \end{aligned} \quad (\text{III.1-4})$$

Tais vetores formam um campo vetorial de Killing.

Os produtos escalares entre os elementos desta base são,

$$\begin{aligned} \hat{t}^a \cdot \hat{t}^a &= e^{-A}, \quad \hat{t}_a \cdot \hat{t}_a = e^A, \quad \hat{t}^a \cdot \hat{t}_a = 1, \\ \hat{z}^a \cdot \hat{z}^a &= e^{-B}, \quad \hat{z}_a \cdot \hat{z}_a = e^B, \quad \hat{z}^a \cdot \hat{z}_a = 1, \\ \hat{\phi}^a \cdot \hat{\phi}^a &= e^{-C}, \quad \hat{\phi}_a \cdot \hat{\phi}_a = e^C, \quad \hat{\phi}^a \cdot \hat{\phi}_a = 1, \\ \hat{\rho}^a \cdot \hat{\rho}^a &= 1, \quad \hat{\rho}_a \cdot \hat{\rho}_a = 1, \quad \hat{\rho}^a \cdot \hat{\rho}_a = 1, \end{aligned}$$

sendo nulos nos demais casos.

Com esta notação ρ é a distância geodésica do eixo a todos os campos de Killing, em uma direção ortonormal; $(\partial/\partial t)^a$

é o campo de Killing do tipo-tempo, $(\partial/\partial\phi)^a$ é o campo de Killing do tipo-espaço, com órbitas fechadas e $(\partial/\partial z)^a$ é o campo de Killing do tipo-espaço, ortonormal aos anteriores.

A normalização destes campos é arbitrária e será escolhida como segue: o campo de Killing com órbitas fechadas será escolhido tal que o parâmetro ao longo de uma integral curvilínea fechada varia de 0 a 2π , e os outros dois campos serão escolhidos de tal modo a terem norma -1 e $+1$ nos eixos respectivamente.

Para obter as equações de campo, no caso do espaço-tempo curvo, devemos empregar os operadores definidos agora na base (III.1-4).

Para a equação (II.1-11), de acordo com os operadores definidos no apêndice B.1, temos

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} = R[4\lambda(R^2 - \eta^2) + e^{-C} \rho^2]. \quad (\text{III.1-5})$$

A equação (II.1-12) é completamente satisfeita e a equação (II.1-13) fica:

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho} = 4\pi g^2 R^2 P. \quad (\text{III.1-6})$$

A demonstração das equações (III.1-5) e (III.1-6) encontra-se no apêndice B.2.

III.2 - DETERMINAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTUM

Vamos novamente tomar o tensor energia-momentum dado por (II.2-1) e assumir a forma dos campos definidos em (II.1-15). Portanto, usando a base (III.1-4) e os operadores definidos no apêndice B.1, teremos para as componentes do tensor energia-momentum:

$$T_{00} = \frac{1}{2} e^A \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \quad (\text{III.2-1})$$

$$T_{11} = -\frac{1}{2} e^B \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \quad (\text{III.2-2})$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} e^C \left[-\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + R^2 P^2 e^{-C} - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \quad (\text{III.2-3})$$

$$T_{33} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - R^2 P^2 e^{-C} - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.2-4})$$

As demais componentes deste tensor são nulas, como mostramos no apêndice B.3. Assim, o tensor energia-momentum só possui componentes diagonais, e será escrito como

$$T_{ab} = \sigma \hat{t}_a \hat{t}_b + p_\beta \hat{\beta}_a \hat{\beta}_b + p_\rho \hat{\rho}_a \hat{\rho}_b + p_\phi \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b, \quad (\text{III.2-5})$$

onde

$$\sigma = -p_\beta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + e^C R^2 P^2 + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \quad (\text{III.2-6})$$

$$p_p = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - e^{-C} R^2 P^2 - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi f^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \quad (\text{III.2-7})$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + e^{-C} R^2 P^2 - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi f^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.2-8})$$

III.3 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Se tomarmos as equações de Einstein na forma usual

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (\text{III.3-1})$$

e multiplicarmos termo a termo por g^{ab} , teremos

$$R - \frac{1}{2} R g^{ab} g_{ab} = 8\pi T \quad (\text{III.3-2})$$

Porém, como $g_{ab} g^{ab} = 4$, resulta que

$$R = - 8\pi T,$$

e assim a equação (III.3-1) fica

$$R_{ab} = 8\pi (T_{ab} - g_{ab} T). \quad (\text{III.3-3})$$

Esta é uma forma equivalente à equação (III.3-1), onde o tensor de Ricci é escrito explicitamente em termos do tensor energia-momentum. Porém|13|

$$R_{ab} = T_{ab,c}^c - T_{ac,b}^c + T_{ab}^c T_{cd}^d - T_{ac}^d T_{bd}^c, \quad (\text{III.3-4})$$

onde

$$T_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} [\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}] \quad (\text{III.3-5})$$

são os coeficientes de conexão. A métrica é dada em (III.1-2) e (III.1-3).

Como g_{ab} e T_{ab} são diagonais, as únicas componentes de R_{ab} não nulas serão (ver apêndice B.4),

$$2R_{00} \bar{e}^A = 2R_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b = \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dA}{d\rho}, \quad (\text{III.3-6})$$

$$-2R_{11} \bar{e}^B = -2R_{ab} \hat{\gamma}^a \hat{\gamma}^b = \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dB}{d\rho}, \quad (\text{III.3-7})$$

$$-R_{22} \bar{e}^C = -2R_{ab} \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b = \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dC}{d\rho}, \quad (\text{III.3-8})$$

$$-2R_{33} = -2R_{ab} \hat{\rho}^a \hat{\rho}^b = \frac{d^2}{d\rho^2} (A+B+C) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.3-9})$$

Podemos obter uma outra forma para estas componentes, em função das componentes do tensor energia-momento T_{ab} . Com o auxílio da equação de Einstein (III.3-3), e lembrando que

$$\begin{aligned} T &= g^{ab} T_{ab} \\ &= -\sigma + p_z + p_\phi + p_\rho, \end{aligned}$$

e ainda que

$$\sigma = -p_z,$$

teremos

$$T = -2\sigma + p_\phi + p_\rho. \quad (\text{III.3-10})$$

Isto leva a

$$2 R_{00} \bar{e}^A = 2 R_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b = 8\pi (p_\phi + p_\rho), \quad (\text{III.3-11})$$

$$-2 R_{11} \bar{e}^B = -2 R_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b = 8\pi (p_\phi + p_\rho), \quad (\text{III.3-12})$$

$$-2 R_{22} \bar{e}^C = -2 R_{ab} \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b = 8\pi (-2\sigma + p_\rho - p_\phi), \quad (\text{III.3-13})$$

$$-2 R_{33} = -2 R_{ab} \hat{p}^a \hat{p}^b = 8\pi (-2\sigma + p_\phi - p_\rho). \quad (\text{III.3-14})$$

Com estes resultados as equações de Einstein ficam,

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dA}{d\rho} = 8\pi (p_\rho + p_\phi), \quad (\text{III.3-15})$$

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dB}{d\rho} = 8\pi (p_\rho + p_\phi), \quad (\text{III.3-16})$$

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dC}{d\rho} = 8\pi (-2\sigma + p_\rho - p_\phi), \quad (\text{III.3-17})$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (A+B+C) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 \right] = 8\pi (-2\sigma - p_\rho + p_\phi). \quad (\text{III.3-18})$$

III.4 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Mostraremos inicialmente que $A = B$. Subtraindo a equa-

ção (III.3-16) da (III.3-15), obtemos

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (A-B) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A-B) \frac{d}{d\rho} (A+B+C) = 0. \quad (\text{III.4-1})$$

Fazendo $\frac{d}{d\rho} (A-B) = \chi$ e $(A+B+C) = \xi$ e integrando, ficamos com

$$\ln \chi = - \left(\frac{1}{2} \xi + a_1 \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \chi &= e^{-\xi/2 - a_1} \\ &= a_2 e^{-\xi/2}, \end{aligned}$$

onde a_1 e a_2 são constantes. Assim temos,

$$\frac{d}{d\rho} (A-B) = a_2 e^{-\frac{1}{2}(A+B+C)}. \quad (\text{III.4-2})$$

De acordo com as condições de contorno no eixo do string, a saber:

$$e^A(0) = 1, \quad e^{C/2}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{d\rho} (e^{C/2}) \right|_0 = 1,$$

a constante a_2 deve ser nula, logo

$$\frac{d}{d\rho} (A-B) = 0,$$

e portanto, desde que $A(0) = B(0) =$, obtemos

$$A = B, \quad (\text{III.4-3})$$

em qualquer ponto do espaço-tempo.

Levando em conta este resultado, observamos que as equações (III.3-15) e (III.3-16) são idênticas. Assim resultam apenas duas equações independentes, a saber,

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} + \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 = 8\pi (p_\rho + p_\phi), \quad (\text{III.4-4})$$

e

$$\frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 = 8\pi(-2\bar{v} + p_p - p_\phi). \quad (\text{III.4-5})$$

Se introduzirmos a quantidade $H \equiv e^{A+C/2}$ nas equações acima, teremos para a equação (III.4-4)

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{H} \frac{dA}{d\rho} \frac{dH}{d\rho} = 8\pi(p_p + p_\phi), \quad (\text{III.4-6})$$

onde usamos

$$\frac{dH}{d\rho} = H \left(\frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} \right), \quad (\text{III.4-7})$$

e

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{4} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 + \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{d\rho^2} \right]. \quad (\text{III.4-8})$$

Com isto a equação (III.4-5) fica

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\rho^2} = \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} - \frac{d^2 A}{d\rho^2} = 4\pi(-2\bar{v} + p_p - p_\phi),$$

mas

$$\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} + \frac{d^2 A}{d\rho^2} = 8\pi(p_p + p_\phi),$$

o que resulta

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\rho^2} = 4\pi(-2\bar{v} + 3p_p + p_\phi). \quad (\text{III.4-9})$$

As equações (III.4-6) e (III.4-9), juntamente com as equações (III.1-5) e (III.1-6), formam um conjunto completo de equações para o string.

Assim, como no caso do espaço-tempo plano, não encontramos uma solução analítica fechada para estas equações. P.Laguna-Castilho e R.a. Matzner propõem uma solução [15], a qual não é uma solução completa, devido às condições introduzidas no modelo.

Para isto tivemos que diminuir o número de constantes, utilizando as relações,

$$X \equiv \frac{R}{\eta}, \quad r \equiv \sqrt{\lambda} \eta \rho, \quad \alpha \equiv \frac{4\pi g^2}{\lambda}, \quad K \equiv \sqrt{\lambda} \eta H \quad e \quad H \equiv e^{A+C/2}.$$

Assim obtivemos para as equações (III.4-6), (III.4-9), (III.1-5) e (III.1-6) respectivamente, (ver apêndice B.5),

$$\frac{d}{dr} \left[K \frac{dA}{dr} \right] - 4\pi\eta^2 \left[-4K(X^2-1)^2 + 2\alpha^{-1}K^{-1}e^{2A} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right] = 0, \quad (\text{III.4-10})$$

$$\frac{d^2 K}{dr^2} - 4\pi\eta^2 \left[-2e^{2A}K^{-1}P^2X^2 - 6K(X^2-1)^2 + \alpha^{-1}e^{2A}K^{-1} \left(\frac{dP}{dr} \right)^2 \right] = 0, \quad (\text{III.4-11})$$

$$K \frac{d}{dr} \left[K \frac{dX}{dr} \right] - X \left[4K^2(X^2-1) + e^{2A}P^2 \right] = 0, \quad (\text{III.4-12})$$

$$e^{-2A}K \frac{d}{dr} \left[e^{2A}K^{-1} \frac{dP}{dr} \right] - \alpha X^2P = 0. \quad (\text{III.4-13})$$

Como a constante de acoplamento η é pequena, usaremos os resultados para X e P já determinados no caso plano.

Assim, transformando as equações (III.4-10) e (III.4-11) numa forma apropriada para resolução numérica (apêndice B.6), ob

tivemos a seguinte solução para A e K:

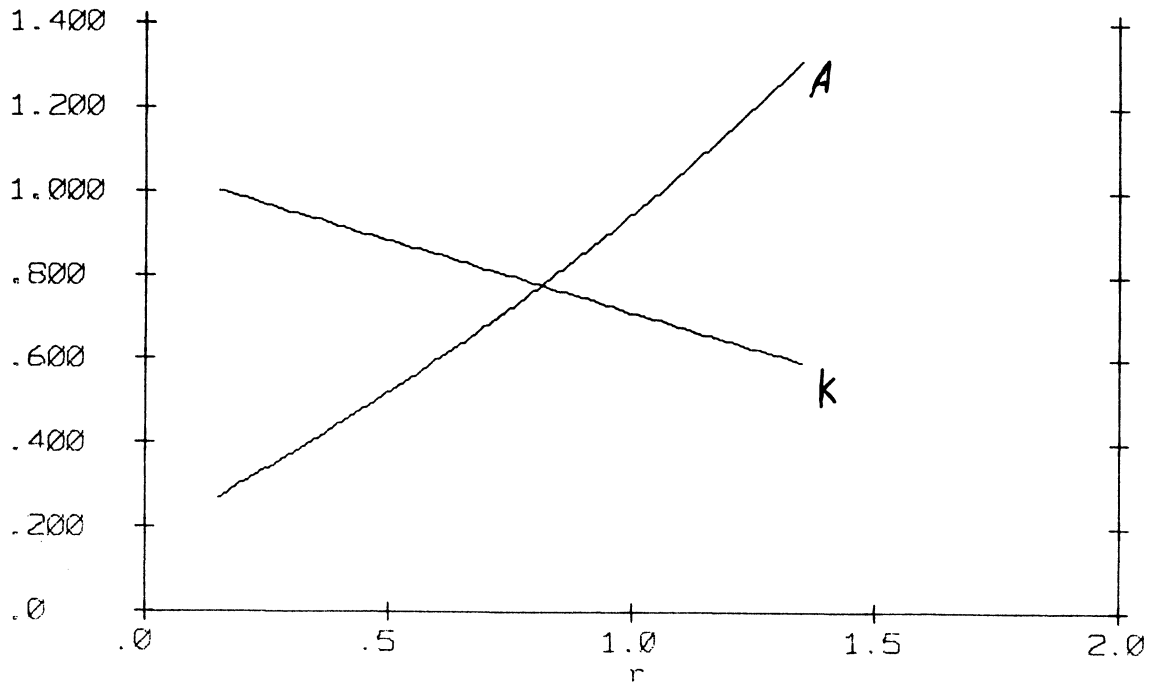


Figura 2 - Resultados para as funções A e K

Estas soluções foram obtidas considerando valores muito pequenos para a constante η (da ordem de 10^{-4}) e supondo $\alpha = 1$. Observamos que para valores de η inferiores a 10^{-4} a solução tende ao mesmo resultado do caso em que $\eta = 0$.

Observamos também que esta solução é estável apenas no intervalo considerado. A constante η acopla o campo escalar que minimiza o potencial de gauge.

IV - LEIS DE CONSERVAÇÃO E ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

"Devemos lembrar-nos(...) que os princípios básicos da física teórica não podem ser aceitos a priori, por muito convincentes que pareçam; em lugar disso, devem ser justificados a partir de experiências relevantes."

Gerald Feinberg e
Marice Goldhaber

IV.1 - LEIS DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo investigaremos algumas propriedades das soluções encontradas para as equações de campo. Faremos algumas suposições sobre o comportamento do tensor energia-momento, quando $\rho \rightarrow \infty$. Assumiremos ainda que a integral

$$\int_0^{\infty} H^2 \sigma d\rho$$

é convergente.

Esta suposição é válida, pois σ representa uma densidade de energia, logo esta integral deve ser finita.

Assumiremos também que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} H^2 \sigma = 0, \quad (\text{IV.1-1})$$

isto é, muito longe do string o campo se anula e a métrica deve tender à métrica de Minkowski.

Será necessário ainda ter a conservação do tensor energia-momentum,

$$\nabla_a T^{ab} = 0.$$

Como as componentes de T^{ab} são diagonais e somente funções de ρ , temos

$$\nabla_3 T^{33} = 0,$$

que pode ser escrita, empregando-se o vetor de base $\hat{\rho}_b$, como

$$\hat{\rho}_b \nabla_a T^{ab} = 0.$$

Porém

$$\nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) = T^{ab} \nabla_a \hat{\rho}_b + \hat{\rho}_b \nabla_a T^{ab},$$

e assim

$$\hat{\rho}_b \nabla_a T^{ab} = \nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) - T^{ab} \nabla_a \hat{\rho}_b,$$

logo

$$\nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) - T^{ab} \nabla_a \hat{\rho}_b = 0.$$

Como se pode observar no apêndice C.1, esta expressão pode ser escrita como,

$$\frac{d}{d\rho} (H p_\rho) - p_\phi \frac{dH}{d\rho} + (\sigma + p_\phi) H \frac{dA}{d\rho} = 0. \quad (\text{IV.1-2})$$

Definindo agora

$$\theta_1 = H \frac{dA}{d\rho} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{dH}{d\rho}, \quad (\text{IV.1-3})$$

a equação (III.4-6) fica

$$\frac{d\theta_1}{d\rho} = 8\pi H (p_\rho + p_\phi), \quad (\text{IV.1-4})$$

e a (III.4-9) fica

$$\frac{d\theta_2}{d\rho} = 4\pi H (-2\sigma + 3p_\rho + p_\phi). \quad (\text{IV.1-5})$$

Temos para a expressão (IV.1-2)

$$\frac{d}{d\rho} (H p_\rho) = p_\phi \theta_2 - (\sigma + p_\phi) \theta_1. \quad (\text{IV.1-6})$$

Integrando as equações (IV.1-4) e (IV.1-5) obtemos

$$\theta_1 = \int_0^\rho 8\pi H (p_\rho + p_\phi) d\rho', \quad (\text{IV.1-6})$$

$$\theta_2 = 1 + \int_0^\rho 4\pi H (-2\sigma + 3p_\rho + p_\phi) d\rho'. \quad (\text{IV.1-8})$$

Por nossas suposições θ_1 e θ_2 devem se aproximar de valores constantes, quando $\rho \rightarrow \infty$.

Multiplicando a equação (IV.1-4) por θ_2 ; a (IV.1-5) por θ_1 e novamente multiplicando a equação (IV.1-4) por $-\frac{3}{2}\theta_1$ e somando estas três expressões, obtemos

$$\theta_2 \frac{d\theta_1}{d\rho} + \theta_1 \frac{d\theta_2}{d\rho} - \frac{3}{2} \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\rho} = 8\pi H \theta_2 (p_\rho + p_\phi) + 4\pi H \theta_1 (-2\sigma + 3p_\rho + p_\phi) - \frac{3}{2} \cdot 8\pi \theta_1 (p_\rho + p_\phi),$$

onde o primeiro membro pode ser escrito como,

$$\theta_2 \frac{d\theta_1}{d\rho} + \theta_1 \frac{d\theta_2}{d\rho} - \frac{3}{2} \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \left[\theta_1 \left(\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1 \right) \right],$$

portanto

$$\frac{d}{d\rho} \left[\theta_1 \left(\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1 \right) \right] = 8\pi H \left[\theta_2 p_\rho + \theta_2 p_\phi - \theta_1 (\sigma + p_\phi) \right].$$

De acordo com a equação (IV.1-6) vemos que

$$\theta_2 p_\phi - \theta_1 (\sigma + p_\phi) = \frac{d}{d\rho} (H p_\rho),$$

logo

$$\frac{d}{d\rho} \left[\theta_1 \left(\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1 \right) \right] = 8\pi H \left[p_\rho \frac{dH}{d\rho} + \frac{d}{d\rho} (H p_\rho) \right],$$

mas

$$p_\rho \frac{dH}{d\rho} + \frac{d}{d\rho} (H p_\rho) = 2H \frac{dH}{d\rho} + H^2 \frac{d}{d\rho} p_\rho = \frac{d}{d\rho} (H^2 p_\rho).$$

Assim resulta que

$$\frac{d}{d\rho} \left[\theta_1 \left(\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1 \right) \right] - \frac{d}{d\rho} (8\pi H^2 p_\rho) = 0, \quad (\text{IV.1-9})$$

ou

$$\frac{d}{d\rho} \left[\theta_1 \left(\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1 \right) - 8\pi H^2 p_\rho \right] = 0.$$

Finalmente

$$\theta_1(\theta_2 - \frac{3}{4}\theta_1) - 8\pi H^2 p_\rho = a_3 ,$$

mas, por nossas suposições em (IV.1-1) e pelo fato de que θ_1 e θ_2 tendem a valores constantes quando $\rho \rightarrow \infty$, a_3 deve ser igual a zero, logo

$$\theta_1(\theta_2 - \frac{3}{4}\theta_1) = 8\pi H^2 p_\rho . \quad (\text{IV.1-10})$$

Dividindo ambos os membros desta equação por H e usando as definições (IV.1-3) temos,

$$\frac{dA}{d\rho} \left[\frac{dH}{d\rho} - \frac{3}{4} H \frac{dA}{d\rho} \right] = 8\pi H p_\rho . \quad (\text{IV.1-11})$$

Chamemos de n_1 e n_2 os valores assumidos por θ_1 e θ_2 respectivamente, no limite quando $\rho \rightarrow \infty$. Ainda, pela suposição que,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} H^2 \sigma = \lim_{\rho \rightarrow \infty} H^2 p_\rho = 0 ,$$

a equação (IV.1-10) fica

$$n_1(n_2 - \frac{3}{4}n_1) = 0 . \quad (\text{IV.1-12})$$

Tal suposição é válida quando trocamos σ por p_ρ ou p_ϕ , pois [8] $\sigma > |p_\rho|$ e $\sigma > |p_\phi|$, logo a integral

$$\int_0^\infty H p_\rho d\rho$$

também converge.

As soluções de (IV.1-12) são

$$n_1 = 0 \quad \text{e} \quad n_1 = \frac{4}{3} n_2 . \quad (\text{IV.1-13})$$

Assim, quando $\rho \rightarrow \infty$, a métrica obtida deve se aproximar de uma métrica de vácuo, que tenha $\theta_1 = 0$ ou que tenha $\theta_1 = \frac{4}{3} \theta_2$.

Este resultado foi obtido anteriormente por Vilenkin [4], sob a suposição que a métrica deve ter a simetria $A = B$, o que mostramos. Veremos mais adiante que $\theta_1 = 0$ corresponde a uma métrica plana, $\theta_1 = \frac{4}{3} \theta_2$ corresponde a uma métrica não plana, análoga à métrica de Kasner [10]. Tal métrica não representa um sistema isolado, e é improvável que tenha alguma relação com strings originados no início do Universo.

Veremos mais adiante que para η pequeno, H e A podem se aproximar de seus valores do espaço-plano, e assim $n_1 \rightarrow 0$ e $n_2 \rightarrow 1$, o que elimina a possibilidade $n_1 = 4/3 n_2$.

No restante deste capítulo focalizaremos somente o caso $n_1 = 0$.

Denotaremos por y_h e l os valores de H e A , respectivamente, para a métrica do vácuo. Devemos ter neste caso

$$\frac{dl}{d\rho} = 0 \quad (\text{IV.1-14})$$

e

$$\frac{dy_h}{d\rho} = n_2 . \quad (\text{IV.1-15})$$

Resolvendo cada uma das equações acima, teremos

$$a = b \quad (\text{IV.1-16})$$

e

$$y_h = n_2 \rho + d \quad (\text{IV.1-17})$$

onde b e d são constantes.

Escrevendo a métrica (III.1-1) com $A = B$ e $e^C = e^{-2A} H^2$ e considerando as soluções (IV.1-16) e (IV.1-17) temos

$$ds^2 = -e^b dt^2 + e^b dz^2 + e^{-2b} (n_2 \rho + d) d\phi^2 + d\rho^2. \quad (\text{IV.1-18})$$

Efetuando a mudança de variáveis

$$t' = e^{b/2} t, \quad z' = e^{b/2} z, \quad \rho' = \rho + d/n_2 \quad \text{e} \quad \phi' = n_2 e^{-b} \phi,$$

resulta que

$$ds^2 = -dt'^2 + dz'^2 + d\rho'^2 + \rho'^2 d\phi'^2, \quad (\text{IV.1-19})$$

que é a expressão da métrica para o espaço-tempo plano. Observamos que enquanto ϕ varia de 0 a 2π , ϕ' terá uma variação diferente, que chamamos de $\Delta\phi$. Esta forma, a métrica (IV.1-19) não é a de Minkowski, mas sim, uma métrica que cobre o espaço-tempo de Minkowski, a menos de uma cunha.

Assim, todas as geodésicas nulas (trajetórias de fótons) que sejam inicialmente paralelas entre si, e que passem em lados opostos de um determinado string, cruzar-se-ão, e o ângulo

de desvio sofrido pelos raios luminosos será igual à deficiência angular $\Delta\phi$, que determina a cunha apresentada pela métrica (IV.1-19).

IV.2 - O DESVIO ANGULAR $\Delta\phi$ E O "EFEITO LENTE"

Desenvolvemos aqui uma técnica para determinar $\Delta\phi$, diferente da sugerida por Gott e Vilenkin.

Chamemos de λ o comprimento de uma órbita $de(\partial/\partial\phi)^a$. Assim, em um espaço-tempo plano, com um desvio angular $\Delta\phi$, teremos para uma variação de λ , entre os pontos ρ_1 e ρ_2 ,

$$\lambda(\rho_2) - \lambda(\rho_1) = (2\pi - \Delta\phi)(\rho_2 - \rho_1). \quad (\text{IV.2-1})$$

Como a métrica, em presença do string, se aproxima da métrica do espaço-tempo plano quando $\rho \rightarrow \infty$, então

$$2\pi - \Delta\phi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{d\lambda}{d\rho}. \quad (\text{IV.2-2})$$

Por outro lado, pela definição de λ ,

$$\lambda = \int_0^{2\pi} [g_{ab} (\partial/\partial\phi)^a (\partial/\partial\phi)^b]^{1/2} d\phi,$$

o que resulta, em face de (III.1-2),

$$\lambda = e^{c/2} \int_0^{2\pi} d\phi = e^{c/2} 2\pi,$$

mas, lembrando que $H = e^{A+c/2}$, temos

$$\mathcal{L} = 2\pi e^{-A} H. \quad (\text{IV.2-3})$$

Desta forma, resulta para a (IV.2-2)

$$2\pi - \Delta\phi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{d}{d\rho} (2\pi e^{-A} H),$$

ou

$$\Delta\phi = 2\pi \left[1 - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{d}{d\rho} (e^{-A} H) \right]. \quad (\text{IV.2-4})$$

Com as suposições feitas no início do capítulo, obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{d}{d\rho} (e^{-A} H) = \int_0^{\infty} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{d}{d\rho} (e^{-A} H) \right] d\rho,$$

e usando as equações (IV.1-3), (IV.1-4), (IV.1-5) e (IV.1-10), teremos (Ver apêndice C.2),

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (e^{-A} H) = -8\pi e^{-A} H \sigma - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (e^{-A} \theta_3) - \frac{1}{4} e^{-A} H \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2. \quad (\text{IV.2-5})$$

Assim a equação (IV.2-4) fica

$$\Delta\phi = 8\pi \int_0^{\infty} 2\pi e^{-A} H \sigma + \pi \left[e^{-A} \theta_3 \right]_0^{\infty} + \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-A} H \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 d\rho.$$

Quando $\rho \rightarrow 0$ ou quando $\rho \rightarrow \infty$, $\theta_1 = 0$, e o termo central desta última expressão desaparece, restando apenas

$$\Delta\phi = 8\pi \int_0^\infty z \pi e^{-A} H \sigma d\rho + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-A} H \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 d\rho. \quad (\text{IV.2-6})$$

Seja μ a massa do string por unidade de comprimento, definida como a integral da densidade de energia σ , sobre uma superfície bidimensional $t = \text{cte}$ e $z = \text{cte}$,

$$\mu = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \sqrt{g_{22}} \sigma d\rho.$$

Como

$$g_{22} = e^C \quad \text{e} \quad e^{C/2} = e^{-A} H$$

obtemos

$$\mu = \int_0^\infty z \pi e^{-A} H \sigma d\rho,$$

e então a equação (IV.2-6) fica

$$\Delta\phi = 8\pi\mu + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-A} H \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 d\rho. \quad (\text{IV.2-7})$$

No capítulo anterior vimos que para $\eta^2 = 0$ a solução encontrada é a mesma para os campos R e P, com as condições $A = 0$ e $H = \rho$, para as funções na métrica. Isso corresponde à métrica do espaço-tempo de Minkowski. Assim, parece razoável que para η^2 pequeno a "solução string" deva estar de acordo com a solução do espaço-tempo plano.

Em muitos modelos, η é menor ou da ordem da massa gran-unificada. No sistema de unidades que empregamos a massa de Planck é a unidade de massa e η é um número pequeno. Em particular, $\eta^2 < 10^{-4}$, na maioria dos casos.

Vamos analisar agora se tal aproximação é auto-consistente.

Tomando as equações

$$\frac{d}{d\rho} \left(H \frac{dA}{d\rho} \right) = 8\pi H (p_p + p_\phi)$$

e

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} = 4\pi H (-2\sigma + 3p_p + p_\phi),$$

temos para a primeira

$$A = \int_0^\rho H^{-1} d\rho' \int_0^{\rho'} 8\pi H (p_p + p_\phi) d\rho'', \quad (\text{IV.2-8})$$

e para a segunda

$$H = \rho + \int_0^\rho d\rho' \int_0^{\rho'} 4\pi H (-2\sigma + 3p_p + p_\phi) d\rho''. \quad (\text{IV.2-9})$$

Usando a solução do espaço-tempo plano, vemos que a correção para A (equação (IV.2-8)) e a correção fracional para H (segundo termo de (IV.2-9)) são da ordem de η^2 , o que mostra que essa aproximação é auto-consistente.

Assim, como as funções A e K são da ordem de η^2 , observamos que o segundo termo da equação (IV.2-7) é da ordem de η^4 , enquanto que o primeiro termo é da ordem de η^2 . Logo, com boa aproximação, podemos negligenciar o segundo termo de (IV.2-6), e obtemos finalmente

$$\Delta\phi \approx \theta\pi\mu.$$

Essa é a expressão para a deficiência angular encontrada por Ford e Vilenkin, usando um método diferente, e que define a deflexão da luz.

Este efeito pode causar imagens duplas de objetos cósmicos situados atrás do string, dentro dos limites de um ângulo da ordem de $\Delta\phi$ a partir do string. A separação angular das imagens é $\lesssim \Delta\phi$. Esta separação é desprezível para os strings do tipo eletrofracos ($\Delta\phi \sim 10^{-31}$ rad), mas é considerável para os strings gran-unificados ($\Delta\phi \sim 10^{-5}$ rad). Este efeito de imagens duplas pode ser a explicação para a ocorrência de quasares duplos.

Tem-se registrado atualmente um número de ordem de 10^4 quasares e espera-se que dentre estes somente um ou dois sejam quasares duplos, devido à presença de strings, situados entre a Terra e esses astros.

Uma outra possibilidade para a detecção de um string seria o estudo de galáxias duplas, já que o número dessas é muito grande.

Kaiser e Stebbins [16] sugerem que os strings poderiam, talvez, deixar um sinal característico sobre a radiação de fundo do Universo. A temperatura de fundo desta radiação teria, assim, pontos de descontinuidade em determinadas regiões do espaço. Esse efeito seria similar a um rastro deixado por um string em movimento.

CONCLUSÃO

Mostramos que as equações acopladas para os campos, que caracterizam os strings, tanto no espaço-tempo plano como no curvo, possuem soluções numéricas, e que estas são válidas, nas vizinhanças do string. Desenvolvemos também as componentes do tensor energia-momentum em coordenadas cilíndricas em ambos os casos e mostramos que este tensor é diagonal na base utilizada. Verificamos que a constante de acoplamento η tem um valor de ordem de 10^{-4} .

Finalmente, obtivemos uma expressão para o desvio angular da luz, pelo string, resultado que concorda com a previsão feita por Vilenkin e Gott.

APÊNDICE A

Apêndice A.1 - Variação da Lagrangeana (II.1-9) em relação aos campos R , ϕ e A^b .

Para $\Lambda = R$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = -R(\nabla_a \phi + \tilde{g} A_a)(\nabla^a \phi + \tilde{g} A^a) - 4\lambda R(R^2 - \eta^2)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^c R)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} (\nabla_a R \nabla^a R) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\nabla_a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} \nabla^a R + \nabla^a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} \nabla_a R \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\nabla_a R \delta_c^a + \nabla^a R \frac{\partial}{\partial(\nabla^c R)} (g_{ab} \nabla^b R) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\nabla_a R \delta_c^a + \nabla^a R g_{ab} \delta_c^b \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\nabla_c R + \nabla_c R \right] \\ &= -\nabla_c R. \end{aligned}$$

Para $\Lambda = \emptyset$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^c \phi)} &= -\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial (\nabla^c \phi)} \left[(\nabla^a \phi + g A^a) (\nabla_a \phi + g A_a) \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[(\nabla^a \phi + g A^a) \frac{\partial}{\partial (\nabla^c \phi)} (\nabla_a \phi + g A_a) + \right. \\ &\quad \left. + (\nabla_a \phi + g A_a) \frac{\partial}{\partial (\nabla^c \phi)} (\nabla^a \phi + g A^a) \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[(\nabla^a \phi + g A^a) g_{ab} \delta_c^b + (\nabla_a \phi + g A_a) \delta_c^a \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[(\nabla_c \phi + g A_c) + (\nabla_c \phi + g A_c) \right] \\ &= -R^2 (\nabla_c \phi + g A_c). \end{aligned}$$

Para $\Lambda = A^b$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^b} &= \frac{\partial}{\partial A^b} \left[-\frac{1}{2} R^2 (\nabla_a \phi + g A_a) (\nabla^a \phi + g A^a) - \frac{1}{16\pi} (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) (\nabla^a A^b - \nabla^b A^a) \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial A^b} \left[\nabla_a \phi \nabla^a \phi + \nabla_a \phi g A^a + \nabla^a \phi g A_a + g^2 A_a A^a \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[g \nabla_a \phi \frac{\partial A^a}{\partial A^b} + g \nabla^a \phi \frac{\partial A_a}{\partial A^b} + g^2 \frac{\partial}{\partial A^b} A_a A^a \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[g \nabla_a \phi \delta_a^b + g \nabla^a \phi g_{ab} \delta_a^b + g^2 \left(A_a \frac{\partial A^a}{\partial A^b} + A^a \frac{\partial A_a}{\partial A^b} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} R^2 g \left[\nabla_a \phi \delta_a^b + \nabla_b \phi \delta_a^b + A_a \delta_a^b + A_b \delta_a^b \right] \\ &= -R^2 g (\nabla_b \phi + g A_b), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (V^c A^d)} &= -\frac{1}{16\pi} \left[\frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_a A_b V^a A^b) - \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_a A_b V^b A^a) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_b A_a V^a A^b) + \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_b A_a V^b A^a) \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi} \left[V_a A_b \delta_c^a \delta_d^b + V^a A^b \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_a A_b) - \right. \\
&\quad - V_a A_b \delta_c^b \delta_d^a - V^b A^a \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_a A_b) - V_b A_a \delta_c^a \delta_d^b - \\
&\quad \left. - V^a A^b \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_b A_a) + V_b A_a \delta_c^b \delta_d^a + V^b A^a \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (V_b A_a) \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi} \left[V_a A_b \delta_c^a \delta_d^b - V_a A_b \delta_c^b \delta_d^a - V_b A_a \delta_c^a \delta_d^b + \right. \\
&\quad + V_b A_a \delta_c^b \delta_d^a + V^a A^b \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (g_{af} V^f A^g g_{gb}) - \\
&\quad - V^b A^a \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (g_{af} V^f A^g g_{gb}) - V^a A^b \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (g_{bf} V^f A^g g_{ga}) + \\
&\quad \left. + V^b A^a \frac{\partial}{\partial (V^c A^d)} (g_{bf} V^f A^g g_{ga}) \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi} \left[V_c A_d - V_d A_c - V_d A_c + V_c A_d + g_{af} V^a A^b g_{gb} \times \right. \\
&\quad \times \delta_c^f \delta_d^g - g_{bg} V^b A^a g_{af} \delta_c^f \delta_d^g - g_{ga} V^a A^b g_{bf} \delta_c^f \delta_d^g + \\
&\quad \left. + g_{bf} V^b A^a g_{ga} \delta_c^f \delta_d^g \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi} \left[4V_c A_d - 4V_d A_c \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi} F_{cd}.
\end{aligned}$$

**Apêndice A.2 - Demonstração das expressões (II.1-16)
e (II.1-17)**

i) Para a equação (II.1-12) teremos,

$$\nabla^a [R^2 (\nabla_a \phi + (P-1) \nabla_a \phi)] = 0,$$

$$\nabla^a [R^2 (\nabla_a \phi + P \nabla_a \phi - \nabla_a \phi)] = 0,$$

$$\nabla^a [R^2 P \nabla_a \phi] = 0,$$

pode-se mostrar que o primeiro membro desta igualdade é nulo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla^a (R^2 P \nabla_a \phi) &= \nabla^0 (R^2 P \nabla_0 \phi) + \nabla^1 (R^2 P \nabla_1 \phi) + \nabla^2 (R^2 P \nabla_2 \phi) + \\ &\quad + \nabla^3 (R^2 P \nabla_3 \phi) \\ &= \nabla^3 (R^2 P \nabla_3 \phi) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (R^2 P \rho^{-1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois R e P são apenas funções de ρ e onde usamos o fato de que

$$\begin{aligned} \nabla_0 \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \nabla_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \nabla_2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 \\ \nabla_3 \phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} = \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Assim mostramos que a equação (II.1-12) é completamente satisfeita para os campos (II.1-15).

ii) Para a equação (II.1-11) teremos

$$\nabla^a \nabla_a R = R [4\lambda(R^2 - \eta^2) + \rho^2 \nabla_a \phi \nabla^a \phi],$$

mas, de acordo com o apêndice B.1, temos

$$\nabla^a \nabla_a R = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) \quad \text{e} \quad \nabla_a \phi \nabla^a \phi = \rho^{-2},$$

assim

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = R [4\lambda(R^2 - \eta^2) + \rho^{-2} \rho^2].$$

Multiplicando ambos os membros desta expressão por ρ^2 resulta

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = R [4\lambda \rho^2 (R^2 - \eta^2) + \rho^2],$$

que é a equação (II.1-16).

iii) Para a equação (II.1-13) teremos

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= 4\pi q R^2 [\nabla_b \phi + (P-1) \nabla_b \phi] \\ &= 4\pi q R^2 P \nabla_b \phi \\ &= 4\pi q R^2 P \rho^{-1}, \end{aligned}$$

e

$$\nabla^a \bar{F}_{ab} = \nabla^a \nabla_a A_b - \nabla^a \nabla_b A_a,$$

onde

$$\begin{aligned}
\nabla^a \nabla_a A_b &= \nabla^2 \nabla_2 A_3 \\
&= \nabla^2 \nabla_2 \left[\frac{1}{f} (P-1) \nabla_3 \phi \right] \\
&= \frac{1}{f} \rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} (P-1) \nabla_3 \phi \right] \\
&= \frac{1}{f} \rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \nabla_2 \phi \frac{dP}{d\rho} \right] \\
&= \frac{1}{f} \rho^{-1} \frac{d^2 P}{d\rho^2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla^a \nabla_a A_a &= \nabla^3 \nabla_2 A_3 \\
&= \nabla^3 \left[\frac{1}{f} \nabla_2 (P-1) \nabla_3 \phi \right] \\
&= \frac{1}{f} \nabla^3 (\nabla_2 P \nabla_3 \phi) \\
&= \frac{1}{f} \rho^{-2} \frac{dP}{d\rho},
\end{aligned}$$

onde novamente usamos os operadores definidos no apêndice B.1.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^a F_{ab} &= \frac{1}{f} \rho^{-1} \frac{d^2 P}{d\rho^2} - \frac{1}{f} \rho^{-2} \frac{dP}{d\rho} \\
&= \frac{1}{f} \rho^{-1} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{-1} \frac{dP}{d\rho} \right) \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{-1} \frac{dP}{d\rho} \right) = 4\pi f^2 R^2 P,$$

que é a expressão (II.1-17).

Apêndice A.3 - Transformação do sistema formado pelas equações (2-1.19) e (2-1.20), numa forma apropriada para a solução numérica. Programas usados.

As equações (2-1.19) e (2-1.20) são

$$n \frac{d}{dn} \left(n \frac{dX}{dn} \right) = X \left[4n^2(X^2 - 1) + P^2 \right],$$

e

$$n \frac{d}{dn} \left(n^{-1} \frac{dP}{dn} \right) = \alpha X^2 P$$

que podem ser escritas como

$$\frac{d^2 X}{dn^2} + \frac{1}{n} \frac{dX}{dn} = X n^{-2} \left[4n^2(X^2 - 1) + P^2 \right],$$

e

$$\frac{d^2 P}{dn^2} - \frac{1}{n} \frac{dP}{dn} = \alpha X^2 P$$

Como X e P são funções somente de r, podemos escrever, com $r \neq 0$,

$$\frac{d^2 X}{dn^2} = \ddot{X}, \quad \frac{dX}{dn} = \dot{X}, \quad \frac{d^2 P}{dn^2} = \ddot{P} \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dn} = \dot{P}.$$

Desta forma temos

$$\ddot{X} + n^{-1} \dot{X} = X n^{-2} \left[4n^2(X^2 - 1) + P^2 \right]$$

e

$$\ddot{P} - n^{-1} \dot{P} = \alpha X^2 P$$

ou

$$\ddot{X} = -\dot{X}/n + 4X^3 - 4X + P^2 X/n^2,$$

$$\ddot{P} = \dot{P}/n + \alpha X^2 P.$$

Fazendo as substituições

$$x_1 = X, \quad x_2 = P, \quad x_3 = \dot{X}, \quad x_4 = \dot{P}, \quad \dot{x}_3 = \ddot{X}, \quad \dot{x}_4 = \ddot{P},$$

resulta

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = 4x_1^3 + \pi^{-2}x_2^2x_1 - 4x_1 - \pi^{-1}x_3$$

$$\dot{x}_4 = \pi^{-1}x_4 + \alpha x_1^2x_2.$$

Empregamos, como condições iniciais, os valores

$$X(0,15) = X_0 = 0,30635$$

$$\dot{X}(0,15) = \dot{X}_0 = 1,0207 \quad (\text{A.3-1})$$

$$P(0,15) = P_0 = 0,67401$$

$$\dot{P}(0,15) = \dot{P}_0 = -0,33954$$

As condições iniciais (A.3-1) foram escolhidas de tal modo que quando $r \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 1$ e $P \rightarrow 0$. Para tanto, usamos dois programas diferentes, a saber:

- i) Sistema de integração de equações diferenciais pelo método de Bulirsch e Stoer;
- ii) Fehlberg Fourth-Fifth Order Runge-kutta Method.

Esses dois programas nos deram os mesmos resultados (Figura 1).

Após termos encontrado essa solução, determinamos as equações polinomiais que melhor representam as curvas obtidas. Para tal fim usamos o "Programa para Ajustamento de Curvas", versão desenvolvida por Sérgio L.M. Berleze, do Departamento de Física, da UFPR. Este programa nos forneceu um polinômio de 4ª

ordem para X e um de 3ª ordem para P.

Tais polinômios são

$$X(\kappa) = 0,03310411 \kappa^4 - 0,05535156 \kappa^3 + 0,1809528 \kappa^2 + \\ + 0,6095038 \kappa + 0,2117615$$

e

$$P(\kappa) = 0,08204987 \kappa^3 - 0,215569 \kappa^2 - 0,2055447 \kappa + 1,060333.$$

Finalmente, com as respectivas soluções para X e P, recorreremos a um programa que plota as curvas para estas funções. O resultado é mostrado na figura 1.

```

C      PROGRAMA BULIRCH E STOER
C
EXTERNAL FONK
LOGICAL FIN
INTEGER AUTOMA, EXTRAP
DIMENSION X(4), S(4), YA(4), YL(4), YM(4), DY(4), DX(4), DT(7,4)
DIMENSION YG(8,4), YH(8,4)
COMMON/INTNUM/AUTOMA, EXTRAP
N=4
WRITE(5,1)
1  FORMAT(1H1)
AUTOMA = 0
EXTRAP = 10
EPS = 0.100E-15
PAS = 0.05
H0 = PAS
DO 6 I = 1,4
6  S(I) = 0.0
C  CONDIÇÕES INICIAIS
T = 0.15
X(1) = 0.353307
X(2) = 1.01395
X(3) = 0.194076
X(4) = -0.145638
WRITE(5,502)
502 FORMAT(1X, 'ENTRE COM O VALOR DE TFIN')
READ(5,*)TFIN
K=0
9  WRITE(1,10)T,X(1),X(2),T,X(3),X(4)
10 FORMAT(1X, 'T=',F13.7,5X, 'X1=',F13.6,5X, 'X2=',E13.6,1X, 'T=',
* F13.7,5X, 'X3=',E13.6,5X, 'X4=',F13.6/)
* IF((H0.GT.0..AND.T.GT.TFIN).OR.(H0.LT.0..AND.T.LT.TFIN)).
* OR.(H0.LT.0..AND.T.LE.0.)) GO TO 12
CALL SEDIBS(N,T,X,H0,EPS,S,FONK,FIN,YA,YL,YM,DY,DX,DT,YG,YH)
K = K + 1
GO TO 9
12 WRITE(5,222)
222 FORMAT(///,15X, 'FIM DOS CALCULOS')
STOP
END
SUBROUTINE FONK(T,X,DX)
DIMENSION X(4),DX(4)
F1 = X(1)
F2 = X(2)
F3 = X(3)
F4 = X(4)
DX(1) = F3
DX(2) = F4
DX(3) = 4.*F1*F1*F1 + F1*F2*F2/(T*T) - 4.*F1 - F3/T
DX(4) = F4/T + F1*F1*F2
RETURN
END

```



```

00100      SURROUTINE SEDIBS(N,Y,Y,H0,EPS,S,F,FIN,YA,YL,YM,DY,DZ,DT,YG,
00200      LOGICAL      KONV,RO,BH,FIN                                YH)
00300      INTEGER AUTOMA,PASSE,EXTRAP
00400      INTEGER R,SR
00500  C      SISTEMA DE INTEGRACAO DE EQUACOES DIFERENCIAIS POR BULIRCH E STO
00600      DIMENSION YA(6),YL(6),YM(6),DY(6),DZ(6),DT(7,6),D(7),YG(8,6)
00700      DIMENSION      YH(8,6),Y(6),S(6)
00800      COMMON /INTNUM/AUTOMA,EXTRAP
00900      COMMON /FINI/PASSE
01000      COMMON /NUM/ENE,ER,L,IP,IQ,AF,AG,DESSE,GMA,M,DF,DG,ESSE
01100      COMMON /NUM1/F1,F2,F3,F4,F5,F6
01200      PASSE=0
01300      CALL F(X,Y,DZ)
01400      PASSE=1
01500      RH=.FALSE.
01600      FIN=.FALSE.
01700      DO 10 I=1,N
01800  10      YA(I)=Y(I)
01900  20      A=H0+X
02000  C      COMENTARIOS
02100      FC=1.5E0
02200      RO=.FALSE.
02300      M=1
02400      R=2
02500      SR=3
02600      JUP1=0
02700  C      EXTRAPOLACOES SUCESSIVAS
02800      DO 170 JPI=1,EXTRAP
02900      IF(RO) GO TO 30
03000      D(2)=2.25E0
03100      D(4)=9.E0
03200      D(6)=36.E0
03300      GO TO 40
03400  30      D(2)=1.777777777777777E0
03500      D(4)=7.111111111111111E0
03600      D(6)=28.444444444444444E0
03700  40      KONV=.FALSE.
03800      IF(JPI.GT.3) KONV=.TRUE.
03900      IF(JPI.GT.7) GO TO 50
04000      LP1=JPI
04100      D(LP1)=R**2
04200      GO TO 60
04300  50      LP1=7
04400      D(7)=64.E0
04500      FC=0.6E0*FC
04600  60      M=2*M
04700      DM=M
04800      G=H0/DM
04900      R=G*2.E0
05000      IF(BH.AND.JPI.LT.9) GO TO 110
05100      KK=(M-2)/2
05200  C      CALCULO DE T(H)
05300      M=M-1
05400      DO 70 I=1,M
05500      YL(I)=YA(I)
05600  70      YM(I)=YA(I)+G*DZ(I)
05700      DO 100 K=1,M
05800      DK=K
05900      XDKG=X+DK*G
06000      CALL F(XDKG,YM,DY)
06100      DO 80 I=1,N
06200      U=YL(I)+B*DY(I)
06300      YL(I)=YM(I)

```

```

06400      YM(1)=U
06500      U=ABS(U)
06600      IF(U.GT.S(I)) S(I)=J
06700      80      CONTINUE
06800      IF(K.NE.KK.OR.K.EQ.2) GO TO 100
06900      JJP1=1+JJP1
07000      DO 90 I=1,N
07100      YH(JJP1,I)=YM(I)
07200      YG(JJP1,I)=YL(I)
07300      90      CONTINUE
07400      100     CONTINUE
07500      GO TO 130
07600      110     DO 120 I=1,N
07700      YM(I)=YH(JJP1,I)
07800      120     YL(I)=YG(JJP1,I)
07900      130     CALL F(A,YM,DY)
08000      C      CALCULO DO VALOR EXTRAPOLADO T(0)
08100      DO 160 I=1,N
08200      V=DT(1,1)
08300      TA=(YM(I)+YL(I)+G*DY(I))*0.5E0
08400      C=TA
08500      DT(1,1)=TA
08600      DO 150 KP1=2,LP1
08700      R1=D(KP1)*V
08800      R=R1-C
08900      U=V
09000      IF(R.EQ.0.F0) GO TO 140
09100      R=(C-V)/R
09200      U=C*R
09300      C=R1*B
09400      140     V=DT(KP1,1)
09500      DT(KP1,1)=U
09600      TA=U+TA
09700      150     CONTINUE
09800      IF(ABS(Y(I)-TA).LE.EPS*S(1)) GO TO 155
09900      KONV=.FALSE.
10000      155     Y(I)=TA
10100      160     CONTINUE
10200      IF(KONV) GO TO 180
10300      D(3)=4.E0
10400      D(5)=16.F0
10500      BU=.NOT.BU
10600      M=R
10700      R=SR
10800      SR=M*2
10900      170     CONTINUE
11000      C      COMENTARIOS
11100      IF(AUTOMA.EQ.0) GO TO 180
11200      RH=.NOT.RH
11300      FIN=.TRUE.
11400      H0=H0*0.5E0
11500      GO TO 20
11600      C
11700      180     IF(AUTOMA.EQ.0) FC=1.E0
11800      H0=FC*H0
11900      X=A
12000      RETURN
12100      END

```

```

C      PROGRAMA RUNGE-KUTTA
      EXTERNAL F
      REAL T,Y(4),TOUT,RELERR,ABSERR
      REAL TFINAL,TPRINT,ECC,ALFA,ALFASQ,WORK(27)
      INTEGER IWORK(5),IFLAG,NEQN
      NEQN=4
      T=0.15
      Y(1)=0.353307
      Y(2)=1.01395
      Y(3)=0.194076
      Y(4)=-0.145638
      RELERR=1.0E-9
      ABSERR=0.0
      TFINAL=3.0
      TPRINT=0.05
      IFLAG=1
      TOUT=T
10     CALL RKF45(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK,IWORK)
      WRITE(1,11) T,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4)
      GO TO (80,20,30,40,50,60,70,80),IFLAG
20     TOUT=T + TPRINT
      IF(T,LT,TFINAL) GO TO 10
      STOP
30     WRITE(1,31)RELERR,ABSERR
      GO TO 10
40     WRITE(1,41)
      GO TO 10
50     ABSERR=1.0E-9
      WRITE(1,31) RELERR,ABSERR
      GO TO 10
60     RELERR=10.0*RELERR
      WRITE(1,31)RELERR,ABSERR
      IFLAG=2
      GO TO 10
70     WRITE(1,71)
      IFLAG=2
      GO TO 10
80     WRITE(1,81)
      STOP

11     FORMAT(1X,F5.3,4E15.8)
31     FORMAT(17H TOLERANCES RESET,2E12.3)
41     FORMAT(11H MANY STEPS)
71     FORMAT(12H MUCH OUTPUT)
81     FORMAT(14H IMPROPER CALL)
      END
      SUBROUTINE F(T,Y,YP)
      DIMENSION Y(4),YP(4)
      F1=Y(1)
      F2=Y(2)
      F3=Y(3)
      F4=Y(4)
      YP(1)=F3
      YP(2)=F4
      YP(3)=4.*F1*F1*F1+F1*F2*F2/(T*T)-4.*F1-F3/T
      YP(4)=F4/T + F1*F1*F2
      RETURN
      END

```

```

*****
* PROGRAMA PARA AJUSTAMENTO DE CURVAS *
* ALGORITMO DE MIQUEL & CASTELLS *
* VERSAO DESENVOLVIDA POR SERGIO LUIZ MEISTER BERLEZE *
* CURITIBA - JUNHO/87 *
*****

```

MODULO DE DECLARACAO E INICIALIZACAO DE VARIAVEIS:

```

DIMENSION C(15),X(3,150),Y(150),Q(15,16),C1(15),YC(150),
1 ERROP(150),P(15),D(15),CAR(0:1),T(15),XT(4),EXPR(16),DESVIO(15)
DATA CAR(1) /'NAO-'/, XT/'X(?I)', 'Y(I)', 'YC(I)', 'ERRO%'/
1 ,HIEFN /'====='/

```

MODULO DE ENTRADA DE DADOS:

```

OPEN(UNIT=1,DEVICE='DSK',ACCESS='SEQUIN',MODE='ASCII',
1 FILE='DADOS.DAT')
READ(1,*)NCOE,NVAR,NPON,ERRO,ILIN
READ(1,*)(C(I),I=1,NCOE)
READ(1,*)((X(I,J),I=1,NVAR),Y(J)),J=1,NPON)
CLOSE(UNIT=1,FILE='DADOS.DAT')
OPEN(UNIT=1,DEVICE='DSK',ACCESS='SEQUIN',MODE='ASCII',
1 FILE='FIT111.FOR')
READ(1,5)(EXPR(I),I=1,16)
5 FORMAT(157(/)16A5)
CLOSE(UNIT=1,FILE='FIT111.FOR')

```

MODULO DE VALIDACAO DE DADOS:

```

IF(NPON.GT.150)STOP 'NPON > 150 MODIFIQUE DIMENSION'
IF(NCOE.GT.15)STOP 'NCOE > 15 MODIFIQUE DIMENSION'
IF(NVAR.GT.3) STOP 'NVAR > 3 MODIFIQUE DIMENSION'
IF(NCOE.GT.NPON) STOP 'PROBLEMA FORMULADO DE FORMA INCORRETA
1 NCOE > NPON'
ERRO=ABS(ERRO)
IF(ILIN.NE.0.AND.ILIN.NE.1) TLIN=1

```

MODULO DE CALCULO DOS COEFICIENTES:

```

DO 8 I=1,NCOE
8 P(I)=C(I)
NPAS=0
NCOEI=NCOE+1
DO 60 IKJ=1,30
DO 10 J=1,NCOE
DO 10 K=1,NCOEI
10 Q(J,K)=0.
DO 30 I=1,NPON
IA=I
CALL FUNCAO(IA,C,X,Y(IA),AUX,F2,NCOE,NPON,NVAR)
DO 20 J=1,NCOE
DENO= C(J)*(1.F-3)
C(J)=C(J)+DENO
CALL FUNCAO(IA,C,X,Y(IA),AUX,F1,NCOE,NPON,NVAR)
D(J)= (F1-F2)/DENO
C(J)= C(J)-DENO
20 Q(J,NCOEI)=Q(J,NCOEI)-F2*D(J)
DO 30 J=1,NCOE
DO 30 K=1,NCOEI
30 Q(J,K)=Q(J,K)+D(J)*D(K)
CALL JORDAN(NCOEI,0,NCOE,KS)
IF(KS.EQ.0)STOP 'MATRIZ SINGULAR -> NAO HA' SOLUCAO'
DO 40 K=1,NCOE
40 C1(K)=C(K)
SK=1.
R=0.618034
IF(NPAS.NE.1.AND.ILIN.NE.0)CALL FIBO(NCOEI,Y,R,-R,1.,0.02.
1 0.005,SK,Q,C,C1,X,NPON,NVAR,NCOE)
F1=0.

```

```

DO 50 K=1,NCOE
C(K)=C1(K)+SK*O(K,NCOE1)
50 F1=F1+ABS(SK*Q(K,NCOE1)/C1(K))/FLOAT(NCOE)
IF(F1,LT,(5.E-2)) NPAS=1
IF(F1,LE,ERRO.AND.SK,GT,ERRO) GO TO 70
60 CONTINUE
STOP 'PROBLEMA NAO CONVERGIU'
C MODULO DE CALCULOS ESTATISTICOS:
70 YM=0.
DO 80 I=1,NPON
IA=1
CALL FUNCAO(IA,C,X,Y(IA),YC(IA),AUX,NCOE,NPON,NVAR)
80 YM=YM+Y(I)/FLOAT(NPON)
E=0.
G1=0.
G2=0.
DO 90 I=1,NPON
G1=G1+(Y(I)-YM)**2
G2=G2+(YC(I)-Y(I))**2
90 E=E+ABS(100.*(YC(I)/Y(I)-1.)/FLOAT(NPON))
G5=0.
IF((NPON-NCOE).GT.0) G5=SQRT(G2/FLOAT(NPON-NCOE))
CC=1.-G2/G1
DO 100 I=1,NCOE
DESVIO(I)=G5*SQRT(1./ABS(Q(I,1)))
100 T(I)=ABS(C(I)/DESVIO(I))
DO 110 I=1,NPON
110 ERROP(I)=(YC(I)-Y(I))/Y(I)*100.
C MODULO DE SAIDA DE DADOS:
OPEN(UNIT=1,DEVICE='DSK',ACCESS='SEQOUT',MODE='ASCII',
1 FILE='AJUSTE.DAT')
WRITE(1,120)
120 FORMAT(1H1,4X,'FIT11 - AJUSTAMENTO DE CURVAS')
WRITE(1,130)NCOE,NVAR,NPON,ERRO.(P(J),J=1,NCOE)
130 FORMAT(/1X,'NO. COEF. = ',I3,T20,'NO. VAR. = ',I3,T40,
1 'NO. PONTOS = ',I3,T60,'EXATID. = ',E10,2
2 //1X,'VALORES INICIAIS DOS COEFICIENTES C(K):',
3 /6(1X,E15.7,4X))
WRITE(1,140) CAR(ILIN),(EXPR(I),I=1,16)
140 FORMAT(/1X,'FUNCAO AJUSTADA (',A4,'LINEAR):',1X,16A5)
WRITE(1,150) E,G5,CC
150 FORMAT(/10X,'DESVIO MEDIO =',F8.3,'%'
1 /10X,'DESVIO PADRAO DE "Y" =',F8.3
2 /10X,'COEF. DE CORRELACAO =',F11.8)
WRITE(1,160)
160 FORMAT(/1X,'COEF. NO. ',T16,'COEF. ',T30,'DESV. PADRAO(COEF) ',
1 T51,'COEF. T (COEF) '
2 /1X,8(' - '),T16,5(' - '),T30,17(' - '),T51,14(' - '))
WRITE(1,180)((I,C(I),DESVIO(I),T(I)),I=1,NCOE)
180 FORMAT(4X,I2,2X,E16.7,4X,E16.7,4X,E16.7)
WRITE(1,190)(XT(I),I=1,NVAR),XT(2),XT(3),XT(4)
190 FORMAT(/1X,6(5X,A5.5X))
WRITE(1,195)(HIFEN,I=1,NVAR+3)
195 FORMAT(1X,6(5X,A5.5X))
DO 200 I=1,NPON
200 WRITE(1,210)(X(J,I),J=1,NVAR),Y(I),YC(I),ERROP(I)
210 FORMAT(1X,6(E15.7))
CLOSE(UNIT=1,FILE='AJUSTE.DAT')
STOP
END
C SUB-ROTINA PARA SOLUCAO DE SISTEMAS DE EQ. ALGEBRICAS:
C METODO DE GAUSS-JORDAN:
SUBROUTINE JORDAN(NCOE1,O,NCOE,KS)

```

```

DIMENSION Q(15,16)
KS=1
DO 10 J=1,NCOE
IF(ABS(Q(J,J)).LT.(1.E-30)) KS=0
IF(KS.EQ.0) RETURN
DO 10 K=1,NCOE
R=Q(K,J)/Q(J,J)
DO 10 L=J,NCOE
10 IF(K.NE.J) Q(K,L)=Q(K,L)-R*Q(J,L)
DO 20 K=1,NCOE
20 Q(K,NCOE)=Q(K,NCOE)/Q(K,K)
RETURN
END
C SUB-ROTINA PARA CALCULO DA SOMA DO QUADRADO DE F:
FUNCTION SUMF(NCOE,Q,C,C1,X,SK,NPON,NVAR,NCOE,Y)
DIMENSION Q(15,16),C(15),C(15),Y(150),X(3,150)
DO 10 I=1,NCOE
10 C(I)=C1(I)+SK*Q(I,NCOE)
SUMF=0.
DO 20 I=1,NPON
IA=I
CALL FUNCAO(IA,C,X,Y(IA),AUX1,AUX2,NCOE,NPON,NVAR)
20 SUMF=SUMF+AUX2**2
RETURN
END
C SUB-ROTINA PARA CALCULO DA FUNCAO:
SUBROUTINE FUNCAO (I,C,X,Y,PRED,FU,NCOE,NPON,NVAR)
DIMENSION C(15),X(3,150)
C INSERIR A FUNCAO TEORICA DESEJADA:
C PRED=F(X(1,I),...,X(NVAR,I),C(1),...,C(NCOE))
C PRED=.....
C PRED=C(1)/(1.+EXP(C(2)-C(3)*X(1,I)))
FU=Y-PRED
RETURN
END
C SUB-ROTINA PARA PESQUISA DO PARAMETRO LAMBDA:
C METODO "GOLDEN-SECTION":
SUBROUTINE FIBO(NCOE,Y,R,AA,BB,EPSI,ESQ,X1,Q,C,C1,X,NPON,
1 NVAR,NCOE)
DIMENSION Q(15,16),C(15),C(15),Y(150),X(3,150)
LOGICAL XAV
XAV=.FALSE.
A=AA
B=BB
X1= B-R*(B-A)
X2= A+R*(B-A)
SUMF1=SUMF(NCOE,Q,C,C1,X,X1,NPON,NVAR,NCOE,Y)
SUMF2=SUMF(NCOE,Q,C,C1,X,X2,NPON,NVAR,NCOE,Y)
DO 10 I=1,150
IF(ABS(X1-X2).LE.EPSI.OR.ABS((SUMF1-SUMF2)/(SUMF1+SUMF2)).
1 LE.ESQ) XAV=.TRUE.
IF(XAV.AND.SUMF2.LT.SUMF1) X1=X2
IF(XAV) RETURN
IF(SUMF1.LT.SUMF2) GO TO 20
A=X1
X1=X2
SUMF1=SUMF2
X2=B
SUMF2=SUMF(NCOE,Q,C,C1,X,X2,NPON,NVAR,NCOE,Y)
GO TO 10
20 B=X2
X2=X1
SUMF2=SUMF1

```

```
      X1=A  
      SUMF1=SUMF(NCOE1,Q,C,C1,X,X1,NPON,NVAR,NCOE,Y)  
10    CONTINUE  
      RETURN  
      END
```

RESU - AJUSTAMENTO DE CURVAS

COEF.= 5 NO.VAR.= 1 NO.PONTOS= 38 EXATID.= 0.10E-04

ORES INICIAIS DOS COEFICIENTES C(K):

.1000000E+01 0.1000000E+01 0.1000000E+01 0.1000000E+01

CAO AJUSTADA (NAO-LINEAR): SUBROUTINE FIBO(NCOEI,Y,R,AA,BB,EPS1,ESQ,X1,O,C,C

DESVIO MEDIO = 0.040

DESVIO PADRAO DE "Y"= 0.000

COEF. DE CORRELACAO = 0.99999949

P. NO.	COEF.	DESV.PADRAO(COEF)	COEF T (COEF)
1	0.2117615E+00	0.6954690E-04	0.3044874E+04
2	0.6095038E+00	0.1260402E-03	0.4805287E+04
3	0.1809528E+00	0.2589348E-03	0.6986356E+03
4	-0.5535156E-01	0.5380897E-03	0.1027141E+03
5	0.3310411E-01	0.1135791E-02	0.2914630E+02

X(I)	Y(I)	YC(I)	ERRO%
0.1500000E+00	0.3003500E+00	0.3070805E+00	0.2410596E+00
0.2000000E+00	0.3403340E+00	0.3405106E+00	0.5187030E-01
0.2500000E+00	0.3748970E+00	0.3747115E+00	-0.4948743E-01
0.3000000E+00	0.4100010E+00	0.4090721E+00	-0.9484813E-01
0.3500000E+00	0.4458460E+00	0.4453701E+00	-0.1049374E+00
0.4000000E+00	0.4822730E+00	0.4810205E+00	-0.9303570E-01
0.4500000E+00	0.5193680E+00	0.5189947E+00	-0.7106790E-01
0.5000000E+00	0.5571550E+00	0.5569017E+00	-0.4546532E-01
0.5500000E+00	0.5956000E+00	0.5955409E+00	-0.1897981E-01
0.6000000E+00	0.6349110E+00	0.6349412E+00	0.4751430E-02
0.6500000E+00	0.6749370E+00	0.6750999E+00	0.2413082E-01
0.7000000E+00	0.7157000E+00	0.7160438E+00	0.4803267E-01
0.7500000E+00	0.7574420E+00	0.7577902E+00	0.4703127E-01
0.8000000E+00	0.7999990E+00	0.8000393E+00	0.4934991E-01
0.8500000E+00	0.8434500E+00	0.8438659E+00	0.4931190E-01
0.9000000E+00	0.8878040E+00	0.8882550E+00	0.4404154E-01
0.9500000E+00	0.9332720E+00	0.9336005E+00	0.3504170E-01
1.0000000E+01	0.9797220E+00	0.9799707E+00	0.2538175E-01
1.0500000E+01	0.1027260E+01	0.1027403E+01	0.1390010E-01
1.1000000E+01	0.1075943E+01	0.1075903E+01	0.1894597E-02
1.1500000E+01	0.1125023E+01	0.1125717E+01	-0.9373589E-02
1.2000000E+01	0.1176962E+01	0.1176735E+01	-0.1925945E-01
1.2500000E+01	0.1229426E+01	0.1229092E+01	-0.2715944E-01
1.3000000E+01	0.1283284E+01	0.1282808E+01	-0.3241760E-01
1.3500000E+01	0.1338013E+01	0.1338148E+01	-0.3473342E-01
1.4000000E+01	0.1395495E+01	0.1395022E+01	-0.3306329E-01
1.4500000E+01	0.1454021E+01	0.1453506E+01	-0.2991052E-01
1.5000000E+01	0.1514287E+01	0.1513939E+01	-0.2297532E-01
1.5500000E+01	0.1576401E+01	0.1576186E+01	-0.1301370E-01
1.6000000E+01	0.1640480E+01	0.1640438E+01	-0.2506973E-02
1.6500000E+01	0.1706052E+01	0.1706009E+01	0.9174770E-02
1.7000000E+01	0.1775057E+01	0.1775418E+01	0.2035055E-01
1.7500000E+01	0.1845054E+01	0.1840392E+01	0.2913141E-01
1.8000000E+01	0.1919213E+01	0.1919859E+01	0.3305317E-01
1.8500000E+01	0.1995329E+01	0.1995954E+01	0.3134478E-01
1.9000000E+01	0.2074417E+01	0.2074818E+01	0.1933745E-01

RESU - AJUSTAMENTO DE CURVAS

NO. COEF. = 4 NO. VAR. = 1 NO. PONTOS = 43 EXATID. = 0.10E-1

VALORES INICIAIS DOS COEFICIENTES C(K):

0.1000000E+01 0.1000000E+01 0.1000000E+01 0.1000000E+01

FUNCAO AJUSTADA (NAO-LINEAR): END

DESVIO MEDIO = 0.555
DESVIO PADRAO DE "Y" = 0.004
COEF. DE CORRELACAO = 0.99955545

COEF. NO.	COEF.	DESV. PADRAO (COEF)	COEF T (COEF)
1	0.1060333E+01	0.6015693E-03	0.1002754E+04	
2	-0.2055447E+00	0.1066712E-02	0.1927803E+03	
3	-0.2155690E+00	0.1922895E-02	0.1121005E+03	
4	0.8204907E-01	0.3530310E-02	0.2320211E+02	

X(I)	Y(I)	YC(I)	ERRO%
0.1500000E+00	0.1013959E+01	0.1024928E+01	0.1001767E+01
0.2000000E+00	0.1005030E+01	0.1011257E+01	0.5595933E+00
0.2500000E+00	0.9953420E+00	0.9967555E+00	0.1420162E+00
0.3000000E+00	0.9832250E+00	0.9814835E+00	-0.1771220E+00
0.3500000E+00	0.9694510E+00	0.9655028E+00	-0.4072019E+00
0.4000000E+00	0.9541940E+00	0.9488750E+00	-0.5574290E+00
0.4500000E+00	0.9376340E+00	0.9310617E+00	-0.6369515E+00
0.5000000E+00	0.9199550E+00	0.9139244E+00	-0.6555325E+00
0.5500000E+00	0.9013370E+00	0.8957246E+00	-0.6226745E+00
0.6000000E+00	0.8819540E+00	0.8771239E+00	-0.5476014E+00
0.6500000E+00	0.8619750E+00	0.8581838E+00	-0.4398321E+00
0.7000000E+00	0.8415600E+00	0.8389658E+00	-0.3082038E+00
0.7500000E+00	0.8208550E+00	0.8195315E+00	-0.1612369E+00
0.8000000E+00	0.7999800E+00	0.7999424E+00	-0.0950470E-02
0.8500000E+00	0.7791140E+00	0.7602601E+00	0.1470975E+00
0.9000000E+00	0.7503180E+00	0.7005400E+00	0.2938090E+00
0.9500000E+00	0.7317110E+00	0.7400618E+00	0.4271047E+00
1.0000000E+01	0.7173050E+00	0.7212690E+00	0.5414049E+00
0.1050000E+01	0.6974220E+00	0.7010290E+00	0.0319002E+00
0.1100000E+01	0.6778930E+00	0.6820035E+00	0.6948741E+00
0.1150000E+01	0.6588020E+00	0.6630540E+00	0.7273097E+00
0.1200000E+01	0.6403050E+00	0.6450420E+00	0.7272118E+00
0.1250000E+01	0.6225100E+00	0.6260290E+00	0.6938049E+00
0.1300000E+01	0.6052790E+00	0.6090706E+00	0.6274170E+00
0.1350000E+01	0.5807310E+00	0.5918404E+00	0.5291690E+00
0.1400000E+01	0.5728980E+00	0.5751998E+00	0.4017020E+00
0.1450000E+01	0.5578080E+00	0.5591984E+00	0.2492063E+00
0.1500000E+01	0.5434060E+00	0.5439038E+00	0.7607251E-01
0.1550000E+01	0.5299560E+00	0.5293714E+00	-0.1091713E+00
0.1600000E+01	0.5172360E+00	0.5150809E+00	-0.3006572E+00
0.1650000E+01	0.5053470E+00	0.5020757E+00	-0.4890314E+00
0.1700000E+01	0.4943040E+00	0.4910234E+00	-0.6636034E+00
0.1750000E+01	0.4841230E+00	0.4801855E+00	-0.8133236E+00
0.1800000E+01	0.4748210E+00	0.4704236E+00	-0.9201181E+00
0.1850000E+01	0.4664130E+00	0.4617992E+00	-0.9892127E+00
0.1900000E+01	0.4589120E+00	0.4543738E+00	-0.9869011E+00
0.1950000E+01	0.4523360E+00	0.4482090E+00	-0.9123723E+00

```

C      PROGRAMA QUE PLOTA AS CURVAS REFERENTES AOS CAMPOS ESCALAR
C      E GAUGE
C      DECLARACAO E INICIALIZACAO DE VARIAVEIS
—     DIMENSION TITULO(8),TAB(100,30)
      DATA X,Y/5.,5./,
1      TITULO /'MAGNITUDES DOS CAMPOS ESCALAR E GAUGE'/,
1      XX/'X'/,PP/'P'/,RR/'R'/
C      MODULO DE ENTRADA DE DADOS GRAFICOS
      OPEN(UNIT=1,DEVICE='DSK',ACCESS='SEQIN',MODE='ASCII',
2      FILE='SUB.DAT')
10     READ(1,*,END=10) PMIN,PMAX,DP,RMIN,RMAX,DR,X,Y
60     CLOSE(UNIT=1,FILE='SUB.DAT')
C      MODULO DE CALCULOS BASICOS
      NP=ABS(PMAX-PMIN)/DP
      NR=ABS(RMAX-RMIN)/DR
      ESCX=X/ABS(PMAX-PMIN)
      ESCY=Y/ABS(RMAX-RMIN)
C      MODULO PARA TRACADO DE MARGENS
      CALL PLOPEN
      CALL PLSCAL(1.,1.,0.,0.)
      CALL PLMOVE(2,7.5,0.)
      CALL PLMOVE(0,7.5,10.)
      CALL PLMOVE(0,0.,10.)
      CALL PLMOVE(-1,0.,0.)
C      MODULO PARA TRACADO DE TITULOS E ESCALAS
      CALL PLMOVE(1,0.5,9.)
      CALL PLTEXT(0.5,9.,0.15,0.,TITULO,37)
      CALL PLMOVE(1,1.,8.5 - Y)
      CALL PLSCAL(ESCX,ESCY,PMIN,RMIN)
      CALL PLGRID(0,PMIN,RMIN,DP,NP)
      CALL PLMOVE(1,PMIN,RMIN)
      CALL PLGRID(1,PMIN,RMIN,DR,NR)
      CALL PLMOVE(1,PMIN,RMIN+DR*FLOAT(NR))
      CALL PLGRID(0,PMIN,RMIN+DR*FLOAT(NR))
      CALL PLMOVE(1,PMIN+FLOAT(NP)*DP,RMIN)
      CALL PLGRID(1,PMIN+FLOAT(NP)*DP,RMIN,DR,NR)
      AUX=RMIN - 0.2/ESCY
      CALL PLMOVE(1,PMIN-0.15/ESCX,AUX)
      CALL PLNUMB(PMIN-0.15/ESCX,AUX,0.1,0.,PMIN,1)
      DO 50 I=1,NP
          VALL = PMIN+FLOAT(I)*DP
50     CALL PLNUMB(VALL-0.15/ESCX,AUX,0.1,0.,VALL,1)
      CALL PLMOVE(1,(PMAX-PMIN)/2.,RMIN-0.4/ESCY)
      CALL PLTEXT((PMAX-PMIN)/2.,+PMIN,AUX-0.15/ESCY,0.1,0.,RR,1)
      AUX=PMIN-0.7/ESCX
      CALL PLNUMB(AUX,RMIN-0.05/ESCY,0.1,0.,RMIN,3)
      DO 60 I=1,NR
          VALL = RMIN+FLOAT(I)*DR
60     CALL PLNUMB(AUX,VALL-0.05/ESCY,0.1,0.,VALL,3)
      CALL PLMOVE(1,PMIN,RMIN)
C      MODULO DE ENTRADA DE DADOS TEORICOS
      OPEN(UNIT=1,DEVICE='DSK',ACCESS='SEQIN',MODE='ASCII',
3      FILE='TABELA.DAT')
      DO 70 I=1,100
70     READ(1,*,END=80)(TAB(I,J),J=1,3)
80     CLOSE(UNIT=1,FILE='TABELA.DAT')
      I=I-1
C      MODULO DA PLOTAGEM DA CURVA
      CALL PLMOVE(1,TAB(1,1),TAB(1,2))
      DO 90 J=2,I
90     CALL PLMOVE(2,TAB(J,1),TAB(J,2))
      CALL PLMOVE(1,TAB(1,1),TAB(1,3))
      DO 100 J=1,I

```

Apêndice A.4 - Demonstração das componentes $T_{00}, T_{11},$
 T_{22} e T_{33} do tensor energia-momentum.

Tomemos a expressão de T_{ab} , dada em (II.2-1)

$$T_{ab} = \nabla_a R \nabla_b R + R^2 \rho^2 \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_a A^c - \nabla^c A_a)(\nabla_b A_c - \nabla_c A_b) +$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} \nabla_c R \nabla^c R - \frac{1}{2} R^2 \rho^2 \nabla_c \phi \nabla^c \phi - \lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16\pi} (\nabla_c A_m - \nabla_m A_c)(\nabla^c A^m - \nabla^m A^c) \right] g_{ab}.$$

i) Para $a = b = 0$ temos

$$T_{00} = \nabla_0 R \nabla_0 R + R^2 \rho^2 \nabla_0 \phi \nabla_0 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_0 A^c - \nabla^c A_0)(\nabla_0 A_c - \nabla_c A_0) +$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} \nabla_c R \nabla^c R - \frac{1}{2} R^2 \rho^2 \nabla_c \phi \nabla^c \phi - \lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16\pi} (\nabla_c A_m - \nabla_m A_c)(\nabla^c A^m - \nabla^m A^c) \right] g_{00}$$

Como

$$\nabla_0 R = \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \quad \nabla_0 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad A_0 = 0 \quad \text{e} \quad g_{00} = -1,$$

então

$$T_{00} = \frac{1}{2} \nabla_c R \nabla^c R + \frac{1}{2} R^2 \rho^2 \nabla_c \phi \nabla^c \phi + \frac{1}{16\pi} (\nabla_c A_m - \nabla_m A_c)(\nabla^c A^m - \nabla^m A^c) +$$

$$+ \lambda (R^2 - \eta^2)^2.$$

Porém, de acordo com o apêndice B.1, temos

$$\nabla_c R \nabla^c R = \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2, \quad \nabla_c \phi \nabla^c \phi = \rho^{-2},$$

e

$$(\nabla_c A_m - \nabla_m A_c)(\nabla^c A^m - \nabla^m A^c) = 2 \nabla_2 A_3 \nabla^2 A^3 \\ = \frac{2}{7} \rho^{-2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2.$$

Portanto

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + \frac{1}{2} R^2 \rho^2 \rho^{-2} + \lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{8\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2,$$

ou

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + R^2 \rho^2 \rho^{-2} + 2 \lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\},$$

que é a expressão (II.2-2).

ii) Para $a = b = 1$ temos,

$$T_{11} = \nabla_1 R \nabla_1 R + R^2 \rho^2 \nabla_1 \phi \nabla_1 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_1 A^c - \nabla^c A_1)(\nabla_1 A_c - \nabla_c A_1) + L g_{11},$$

mas como

$$\nabla_1 R = \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \nabla_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad A_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_{11} = +1,$$

então

$$T_{11} = L$$

$$= -T_{00}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + R^2 \rho^2 \rho^{-2} + 2 \lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\},$$

que a expressão (II.2-3).

iii) Para $a = b = 2$ temos

$$T_{22} = \nabla_2 R \nabla_2 R + R^2 \rho^2 \nabla_2 \phi \nabla_2 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_2 A^c - \nabla^c A_2)(\nabla_2 A_c - \nabla_c A_2) + L g_{22},$$

mas como

$$\nabla_2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \quad g_{22} = +1 \quad e \quad L = -T_{00}$$

então

$$T_{22} = \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + \frac{1}{4\pi} \nabla_2 A^C \nabla_2 A_C + L$$

porém, de acordo com o apêndice B.1, temos

$$\nabla_2 A^C \nabla_2 A_C = \frac{1}{g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2,$$

assim

$$\begin{aligned} T_{22} &= \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 - T_{00} \\ &= \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 - \frac{1}{2} \rho^{-2} R^2 \rho^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2, \end{aligned}$$

ou

$$T_{22} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 - \rho^{-2} R^2 \rho^2 - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\},$$

que é a expressão (II.2-4).

iv) Para $a = b = 3$ temos

$$T_{33} = \nabla_3 R \nabla_3 R + R^2 \rho^2 \nabla_3 \phi \nabla_3 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_3 A^C - \nabla^C A_3)(\nabla_3 A_C - \nabla_C A_3) + L g_{33},$$

mas

$$\nabla_3 R = \frac{\partial R}{\partial \phi} = 0, \quad g_{33} = \rho^2 \quad e \quad L = -T_{00},$$

de acordo com o apêndice B.1,

$$\nabla_3 \phi \nabla_3 \phi = \rho^{-2},$$

$$\begin{aligned} (\nabla_3 A^c - \nabla^c A_3)(\nabla_3 A_c - \nabla_c A_3) &= \nabla^2 A_3 \nabla_2 A_3 \\ &= \frac{1}{f^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} T_{33} &= R^2 P^2 \rho^{-2} + \frac{1}{4\pi f^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 + \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 - \rho^{-2} R^2 P^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda(R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4\pi f^2} \rho^{-2} \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} T_{33} &= \frac{1}{2} \rho^2 \left\{ - \left[\frac{dR}{d\rho} \right]^2 + 2R^2 P^2 \rho^{-2} \left(\rho^{-2} \frac{1}{2} \right) - 2\lambda(R^2 - \eta^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \rho^{-2} \frac{1}{2\pi f^2} \left(\rho^{-2} \frac{1}{2} \right) \left[\frac{dP}{d\rho} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

que é a expressão (II.2-5).

APÊNDICE B

Apêndice B.1 - Operadores

No capítulo II, a métrica é

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2.$$

Assim os operadores ∇_a e $\nabla^a \nabla_a$ terão as formas usuais em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla_a = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

e

$$\nabla^a \nabla_a = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Para os campos ϕ e R teremos

$$\nabla_a \phi = \nabla^a \phi = \rho^{-1}, \quad \nabla_a \phi \nabla^a \phi = \nabla_a \phi \nabla_a \phi = \rho^{-2},$$

$$\nabla_a R = \nabla^a R = \frac{dR}{d\rho}, \quad \nabla_a R \nabla^a R = \nabla_a R \nabla_a R = \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2,$$

$$\nabla_a A^b \nabla_a A_b = \nabla_a A_b \nabla^a A^b = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)^2.$$

No capítulo III, a métrica é

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\phi^2 + d\rho^2.$$

De acordo com o Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas (Murray R. Spiegel), página 125, temos para os operadores ∇_a e $\nabla^a \nabla_a$:

$$\nabla_a = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial t} \hat{t}_a + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{\beta}_a + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}_a + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho}_a$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a = \frac{1}{h_0 h_1 h_2 h_3} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_0 h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_0 h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{h_0 h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \end{aligned}$$

Observando a forma da métrica, temos que

$$h_0 = -e^{A/2}, \quad h_1 = e^{B/2}, \quad h_2 = e^{C/2}, \quad h_3 = 1,$$

sendo os vetores de base dados por (III.1-5).

Com isso temos para os campos ϕ e R ,

$$\nabla_a \phi = \frac{1}{e^{C/2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_a e^{-C/2} = e^{-C} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_a \phi = e^{-C} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_a,$$

$$\nabla_a R = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_a R = \frac{dR}{d\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_a,$$

$$\nabla^a \nabla_a R = \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2},$$

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a P \nabla_b \phi &= \nabla^3 \nabla_3 P \nabla_2 \phi = \nabla^3 \nabla_3 P e^{-C} \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho} + \frac{d^2 P}{d\rho^2} \right] e^{-C}. \end{aligned}$$

Apêndice B.2 - Demonstração das equações (III.1-5) e
(III.1-6).

Para a equação (II.1-11) temos

$$\nabla^a \nabla_a R = R [4\lambda(R^2 - \eta^2) + (\nabla_a \phi + \eta A_a)(\nabla^a \phi + \eta A^a)],$$

mas, de acordo com o apêndice B.1 temos que

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a R &= - \frac{1}{e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2}} \left[- \frac{\partial}{\partial \rho} \left(e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{\partial}{\partial \rho} R \right) \right] \\ &= e^{-A/2} e^{-B/2} e^{-C/2} \left[\frac{1}{2} e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{dA}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{2} e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{dB}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{dC}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{d^2 R}{d\rho^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{d^2 R}{d\rho^2}, \end{aligned}$$

e para o segundo termo do segundo membro temos,

$$(\nabla_a \phi + \eta A_a)(\nabla^a \phi + \eta A^a) = P^2 \nabla_a \phi \nabla^a \phi = P^2 e^{-C},$$

assim resulta

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} = R [4\lambda(R^2 - \eta^2) + e^{-C} P^2],$$

que é a equação (III.1-5).

Consideremos agora a equação (II.1-13):

$$\nabla^a F_{ab} = 4\pi q R^2 (\nabla_b \phi + q A_b),$$

seu segundo membro pode ser escrito como

$$4\pi q R^2 (\nabla_b \phi + q A_b) = 4\pi q R^2 P \nabla_b \phi = 4\pi q R^2 P e^{-C}.$$

E para o primeiro membro teremos

$$\nabla^a F_{ab} = \nabla^a \nabla_a A_b - \nabla^a \nabla_b A_a = \nabla^3 \nabla_3 A_2,$$

mas, de acordo com o apêndice B.1, temos

$$\begin{aligned} \nabla^3 \nabla_3 A_2 &= \frac{1}{f} \nabla^3 \nabla_3 P \nabla_2 \phi \\ &= \frac{1}{f} e^{-A/2} e^{-B/2} e^{-C/2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} \frac{dP}{d\rho} e^{-C} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} [A+B-C] \frac{dP}{d\rho} e^{-C} + \frac{d^2 P}{d\rho^2} e^{-C}, \end{aligned}$$

assim temos que

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho} = 4\pi q^2 R^2 P,$$

que é a equação (III.1-6).

Apêndice B.3 - Demonstração das componentes T_{00} , T_{11} ,
 T_{22} e T_{33} do tensor energia-momentum.

Usando novamente o tensor energia-momentum dado por (II.2-1) temos:

i) Para $a = b = 0$,

$$T_{00} = \nabla_0 R \nabla_0 R + P^2 R^2 \nabla_0 \phi \nabla_0 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_0 A^C \nabla_0 A_C) - \nabla_0 A^C \nabla_C A_0 - \\ + \nabla^C A_0 \nabla_0 A_C + \nabla^C A_0 \nabla_C A_0) + L g_{00},$$

como

$$\nabla_0 R = \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \quad \nabla_0 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \nabla_0 A^C = 0 \text{ e } g_{00} = -e^A,$$

temos que

$$T_{00} = -e^A L \\ = \frac{e^A}{2} \left[\nabla^C R \nabla_C R + R^2 P^2 \nabla^C \phi \nabla_C \phi + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi} \nabla^C A^m \nabla_C A_m \right],$$

onde os únicos termos não-nulos são,

$$T_{00} = \frac{e^A}{2} \left[\nabla_3 R \nabla^3 R + R^2 P^2 \nabla_2 \phi \nabla^2 \phi + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi} \nabla_3 A_2 \nabla^3 A^2 \right]$$

então, de acordo com o apêndice B.1, obtemos

$$T_{00} = \frac{1}{2} e^A \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + R^2 P^2 e^{-C} + 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right],$$

que é a expressão (III.2-1).

ii) Para $a = b = 1$,

$$T_{11} = \nabla_1 R \nabla_1 R + P^2 R^2 \nabla_1 \phi \nabla_1 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_1 A^c \nabla_1 A_c - \nabla_1 A^c \nabla_c A_1 - \nabla^c A_1 \nabla_1 A_c + \nabla^c A_1 \nabla_c A_1) + L g_{11} ,$$

mas como

$$\nabla_1 R = \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \nabla_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \nabla_1 A^c = 0 \quad e \quad g_{11} = e^B,$$

temos

$$T_{11} = L e^B = -\frac{1}{2} e^B \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + R^2 P^2 e^{-C} - 2\lambda(R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right],$$

que é a expressão (III.2-2).

iii) Para $a = b = 2$

$$T_{22} = \nabla_2 R \nabla_2 R + P^2 R^2 \nabla_2 \phi \nabla_2 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_2 A^c \nabla_2 A_c - \nabla_2 A^c \nabla_c A_2 - \nabla^c A_2 \nabla_2 A_c + \nabla^c A_2 \nabla_c A_2) + L g_{22} ,$$

mas

$$\nabla_2 R = \frac{\partial R}{\partial \phi} = 0, \quad \nabla_2 A^c = 0,$$

logo

$$T_{22} = P^2 R^2 \nabla_2 \phi \nabla_2 \phi + \frac{1}{4\pi} \nabla^c A_2 \nabla_c A_2 + L g_{22} .$$

De acordo com o apêndice B.1 e lembrando que $g_{22} = e^{-C}$,

obtemos a expressão (III.2-3),

$$T_{22} = \frac{1}{2} e^C \left[- \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + P^2 R^2 e^{-C} - 2\lambda(R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right].$$

iv) Para $a = b = 3$.

$$T_{33} = \nabla_3 R \nabla_3 R + P^2 R^2 \nabla_3 \phi \nabla_3 \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_3 A^C \nabla_3 A_C - \nabla_3 A^C \nabla_C A_3 - \\ - \nabla^C A_3 \nabla_3 A_C + \nabla^C A_3 \nabla_C A_3) + L g_{33} ,$$

mas

$$\nabla_3 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 , \quad \nabla_3 A^C = 0 \quad \text{e} \quad g_{33} = 1 ,$$

logo

$$T_{33} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - R^2 P^2 e^{-C} - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi f^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right] ,$$

que é a expressão (III.2-4).

Para $a \neq b$, temos que $g_{ab} = 0$, de acordo com (III.1-2), logo restam apenas os termos

$$T_{ab} = \nabla_a R \nabla_b R + P^2 R^2 \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{1}{4\pi} (\nabla_a A^C \nabla_b A_C - \nabla_a A^C \nabla_C A_b - \\ - \nabla^C A_a \nabla_b A_C + \nabla^C A_a \nabla_C A_b) .$$

Porém, os termos $\nabla_a R \nabla_b R$ e $\nabla_a \phi \nabla_b \phi$ só serão diferentes de zero quando $a = b$. Desta forma

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (\nabla_a A^C \nabla_b A_C - \nabla_a A^C \nabla_C A_b - \nabla^C A_a \nabla_b A_C + \nabla^C A_a \nabla_C A_b) .$$

Temos porém que, para $a \neq b$, todos esses termos se anulam, logo

$$T_{ab} = 0, \quad \text{para} \quad a \neq b .$$

Apêndice B. 4 - Componentes de R_{ab} .

As componentes do tensor de Ricci serão dadas por

$$\begin{aligned}
 R_{ab} = & \partial_3 \overline{T}_{ab}^3 - \partial_b \overline{T}_{a0}^0 - \partial_b \overline{T}_{a1}^1 - \partial_b \overline{T}_{a2}^2 - \partial_b \overline{T}_{a3}^3 + \overline{T}_{ab}^0 \overline{T}_{00}^0 + \\
 & + \overline{T}_{ab}^0 \overline{T}_{01}^1 + \overline{T}_{ab}^0 \overline{T}_{02}^2 + \overline{T}_{ab}^0 \overline{T}_{03}^3 + \overline{T}_{ab}^1 \overline{T}_{10}^0 + \overline{T}_{ab}^1 \overline{T}_{11}^1 + \overline{T}_{ab}^1 \overline{T}_{12}^2 + \\
 & + \overline{T}_{ab}^1 \overline{T}_{13}^3 + \overline{T}_{ab}^2 \overline{T}_{20}^0 + \overline{T}_{ab}^2 \overline{T}_{21}^1 + \overline{T}_{ab}^2 \overline{T}_{22}^2 + \overline{T}_{ab}^2 \overline{T}_{23}^3 + \overline{T}_{ab}^3 \overline{T}_{30}^0 + \\
 & + \overline{T}_{ab}^3 \overline{T}_{31}^1 + \overline{T}_{ab}^3 \overline{T}_{32}^2 + \overline{T}_{ab}^3 \overline{T}_{33}^3 - \overline{T}_{a0}^0 \overline{T}_{b0}^0 - \overline{T}_{a0}^1 \overline{T}_{b1}^0 - \overline{T}_{a0}^2 \overline{T}_{b2}^0 - \\
 & - \overline{T}_{a0}^3 \overline{T}_{b3}^0 - \overline{T}_{a1}^0 \overline{T}_{b0}^1 - \overline{T}_{a1}^1 \overline{T}_{b1}^1 - \overline{T}_{a1}^2 \overline{T}_{b2}^1 - \overline{T}_{a1}^3 \overline{T}_{b3}^1 - \overline{T}_{a2}^0 \overline{T}_{b0}^2 - \\
 & - \overline{T}_{a2}^1 \overline{T}_{b1}^2 - \overline{T}_{a2}^2 \overline{T}_{b2}^2 - \overline{T}_{a2}^3 \overline{T}_{b3}^2 - \overline{T}_{a3}^0 \overline{T}_{b0}^3 - \overline{T}_{a3}^1 \overline{T}_{b1}^3 - \overline{T}_{a3}^2 \overline{T}_{b2}^3 - \\
 & - \overline{T}_{a3}^3 \overline{T}_{b3}^3 ,
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes de conexão $\overline{\Gamma}_{bc}^a$ são:

$$\overline{T}_{00}^0 = \overline{T}_{00}^1 = \overline{T}_{00}^2 = 0,$$

$$\overline{T}_{00}^3 = -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{00} = \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{11}^0 = \overline{T}_{11}^1 = \overline{T}_{11}^2 = 0,$$

$$\overline{T}_{11}^3 = -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{11} = -\frac{1}{2} e^B \frac{dB}{d\rho}$$

$$\overline{T}_{22}^0 = \overline{T}_{22}^1 = \overline{T}_{22}^2 = 0,$$

$$\overline{T}_{22}^3 = -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{22} = -\frac{1}{2} e^C \frac{dC}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{33}^0 = \overline{T}_{33}^1 = \overline{T}_{33}^2 = \overline{T}_{33}^3 = \overline{T}_{01}^0 = \overline{T}_{02}^0 = 0,$$

$$\overline{T}_{03}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_3 g_{00} = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{01}^1 = \overline{T}_{02}^1 = \overline{T}_{03}^1 = \overline{T}_{01}^2 = \overline{T}_{02}^2 = \overline{T}_{03}^2 = \overline{T}_{01}^3 = \overline{T}_{02}^3 = \overline{T}_{03}^3 = \overline{T}_{12}^0 = 0,$$

$$\overline{T}_{12}^1 = \overline{T}_{12}^2 = \overline{T}_{12}^3 = \overline{T}_{13}^0 = 0,$$

$$\overline{T}_{13}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_3 g_{11} = \frac{1}{2} \frac{dB}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{13}^2 = \overline{T}_{13}^3 = \overline{T}_{23}^0 = \overline{T}_{23}^1 = \overline{T}_{23}^3 = 0,$$

$$\overline{T}_{23}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_3 g_{22} = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{10}^0 = \overline{T}_{10}^1 = \overline{T}_{10}^2 = \overline{T}_{10}^3 = \overline{T}_{20}^0 = \overline{T}_{20}^1 = \overline{T}_{20}^3 = \overline{T}_{21}^0 = \overline{T}_{21}^1 = \overline{T}_{21}^2 = \overline{T}_{21}^3 = 0,$$

$$\overline{T}_{30}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_3 g_{00} = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{30}^1 = \overline{T}_{30}^2 = \overline{T}_{30}^3 = \overline{T}_{31}^0 = 0$$

$$\overline{T}_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_3 g_{11} = \frac{1}{2} \frac{dB}{d\rho},$$

$$\overline{T}_{31}^2 = \overline{T}_{31}^3 = \overline{T}_{32}^0 = \overline{T}_{32}^1 = \overline{T}_{32}^3 = 0,$$

$$\overline{T}_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_3 g_{22} = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho}.$$

Como g_{ab} e T_{ab} são diagonais, as únicas componentes de R_{ab} não nulas serão

$$\begin{aligned} \text{i) } R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} \left(e^A \frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{1}{2} \frac{dB}{d\rho} + \\ &+ \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} - \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{dA}{d\rho} \frac{1}{2} e^A \frac{dA}{d\rho}, \\ &= \frac{1}{2} e^A \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{4} e^A \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{4} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{4} e^A \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} \\ &= \frac{1}{2} e^A \left[\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dA}{d\rho} \right], \end{aligned}$$

ou

$$2R_{00}e^{-A} = 2R_{ab}\hat{t}^a\hat{t}^b = \frac{d^2A}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(A+B+C)\frac{dA}{d\rho},$$

que é a expressão (III.3-6).

$$\begin{aligned} \text{ii) } R_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(e^B\frac{dB}{d\rho}\right) - \frac{1}{2}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{1}{2}\frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{2}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{1}{2}\frac{dB}{d\rho} - \\ &\quad - \frac{1}{2}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{1}{2}\frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{2}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{1}{2}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{2}\frac{dB}{d\rho}\frac{1}{2}e^B\frac{dB}{d\rho} \\ &= -\frac{1}{2}e^B\frac{d^2B}{d\rho^2} - \frac{1}{4}e^B\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{4}e^B\frac{dB}{d\rho}\frac{dC}{d\rho} \\ &= -\frac{1}{2}e^B\left[\frac{d^2B}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(A+B+C)\frac{dB}{d\rho}\right], \end{aligned}$$

ou

$$-2R_{11}e^{-B} = -2R_{ab}\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b = \frac{d^2B}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(A+B+C)\frac{dB}{d\rho},$$

que é a expressão (III.3-7)

$$\begin{aligned} \text{III) } R_{22} &= -\frac{1}{2}e^C\frac{d^2C}{d\rho^2} - \frac{1}{2}e^C\frac{dC}{d\rho}\frac{dC}{d\rho} - \frac{1}{4}e^C\frac{dC}{d\rho}\frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{4}e^C\frac{dC}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} - \\ &\quad - \frac{1}{4}e^C\left(\frac{dC}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{4}e^C\left(\frac{dC}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{4}e^C\left(\frac{dC}{d\rho}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}e^C\frac{d^2C}{d\rho^2} - \frac{1}{4}e^C\left(\frac{dC}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}e^C\frac{dC}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} - \frac{1}{4}e^C\frac{dC}{d\rho}\frac{dA}{d\rho} \\ &= -\frac{1}{2}e^C\left[\frac{d^2C}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(A+B+C)\frac{dC}{d\rho}\right], \end{aligned}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2} e^C \left[\frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dC}{d\rho} \right]$$

ou

$$-2R_{22} e^{-C} = -2R_{ab} \hat{\rho}^a \hat{\rho}^b = \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dC}{d\rho},$$

que é a expressão (III.3-8).

$$\begin{aligned} \text{iv) } R_{33} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{d\rho^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{d\rho^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} (A+B+C) - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ou

$$-2R_{33} = -2R_{ab} \hat{\rho}^a \hat{\rho}^b = \frac{d^2}{d\rho^2} (A+B+C) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dB}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{dC}{d\rho} \right)^2 \right],$$

que é a expressão (III.3-9).

Apêndice B. 5 - Demonstração das equações (III.4-10) e (III.4-11), (III.4-12) e (III.4-13).

Definindo

$$X = \frac{R}{\eta}, \quad r = \sqrt{\lambda} \eta \rho, \quad \alpha = \frac{4\pi g^2}{\lambda}, \quad K = \sqrt{\lambda} \eta H \quad \text{e} \quad H = e^{A+C/2},$$

temos para a equação (III.4-6)

$$\frac{d}{d\rho} \left[H \frac{dA}{d\rho} \right] = 8\pi H \left[-2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi g^2} e^{-C} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda} \eta} K \frac{dA}{d\rho} \right] = \frac{8\pi K}{\sqrt{\lambda} \eta} \left[-\frac{2 \cdot 4\pi g^2}{\alpha} (X^2 \eta^2 - \eta^2)^2 + \frac{e^{-C}}{4\pi g^2} \left(\frac{dP}{\frac{d\rho}{\sqrt{\lambda} \eta}} \right)^2 \right].$$

Após simplificações encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left[K \frac{dA}{d\rho} \right] &= 8\pi \left[-\frac{2 \cdot 4\pi g^2}{\lambda} \alpha^{-1} \eta^2 K (X^2 - 1)^2 + \frac{e^{-C} K}{\alpha \lambda} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \\ &= 4\pi \eta^2 \left[-4K (X^2 - 1)^2 + 2e^{2A} K^{-1} \alpha^{-1} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

que é a equação (III.4-10).

Para a equação (III.4-9) temos,

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} = 4\pi H \left[-2 e^{-C} R^2 P^2 - 6\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + e^{-C} \frac{1}{4\pi g^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right],$$

$$\lambda \eta^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{dk}{dn} \right) = 4\pi k \left[-2e^{-c} \eta^2 x^2 p^2 - 24\tilde{\eta}^2 \alpha^{-1} \eta^4 (x^2 - 1)^2 + \eta^2 e^{-c} \alpha^{-1} \left(\frac{dp}{dn} \right)^2 \right].$$

Dividindo ambos os membros por $\lambda \eta^2$ e simplificando, chegamos a

$$\frac{dk^2}{dn^2} = 4\pi \eta^2 \left[-2e^{2A} k^{-1} x^2 p^2 - 6k \eta^2 (x^2 - 1)^2 + \eta^2 k^{-1} \alpha^{-1} e^{2A} \left(\frac{dp}{dn} \right)^2 \right].$$

Assim

$$\frac{dk^2}{dn^2} = 4\pi \eta^2 \left[-2e^{2A} k^{-1} x^2 p^2 - 6k \eta^2 (x^2 - 1)^2 + \eta^2 k^{-1} \alpha^{-1} e^{2A} \left(\frac{dp}{dn} \right)^2 \right],$$

que é a equação (III.4-11).

Para a equação (III.1-5) temos,

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (A+B+C) \frac{dR}{dp} = R \left[4\lambda (R^2 - \eta^2) + e^{-c} p^2 \right]$$

Como

$$A = B, \quad e^{-c} = H^{-2} \cdot e^{2A},$$

Temos

$$\eta^3 \lambda \frac{d^2 x}{dn^2} + \frac{1}{2} \eta^2 \lambda \frac{d}{dn} (2A+C) \frac{dx}{dn} = R \left[4\lambda \eta^2 (x^2 - 1) + H^{-2} e^{2A} p^2 \right]$$

mas,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dn} (2A+C) = e^{-(A+C/2)} \frac{dH}{dp} = H^{-1} \frac{dH}{dp},$$

logo

$$\frac{d^2 x}{dn^2} + H^{-1} \frac{dH}{dn} \frac{dx}{dn} = \frac{R}{\eta^3 \lambda} \left[4\lambda \eta^2 (x^2 - 1) + \lambda \eta^2 k^{-2} e^{2A} p^2 \right],$$

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + K^{-1} \frac{d}{dr} \left(K \frac{dX}{dr} \right) = X \left[4(X^2 - 1) + e^{2A} P^2 \right],$$

$$K \frac{d}{dr} \left(K \frac{dX}{dr} \right) - X \left[4(X^2 - 1) + e^{2A} P^2 \right],$$

que é a expressão (III.4-12).

Para a equação (III.1-6) temos,

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho} = 4\pi g^2 R^2 P,$$

como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) &= \frac{d}{d\rho} (A - c_2) = e^{-A+c/2} \frac{d}{d\rho} (e^{A-c/2}) \\ &= e^{-2A} H \frac{d}{d\rho} (e^{2A} H^{-1}), \end{aligned}$$

temos

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + e^{-2A} H \frac{d}{dr} (e^{2A} H^{-1}) \frac{dP}{dr} = 4\pi g^2 \eta^2 X^2 P,$$

$$\eta^2 \lambda \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{e^{-2A} K \eta^2 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \eta} \frac{d}{dr} (e^{2A} \sqrt{\lambda} \eta K^{-1}) \frac{dP}{dr} = \frac{4\pi g^2}{\lambda} \eta^2 \lambda X^2 P$$

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + e^{-2A} K \frac{d}{dr} (e^{2A} K^{-1}) \frac{dP}{dr} = \alpha X^2 P,$$

ou

$$e^{-2A} K \frac{d}{dr} \left[e^{2A} K^{-1} \frac{dP}{dr} \right] - \alpha X^2 P = 0,$$

que é a expressão (III.4-13).

Apêndice B.6 - Transformação do sistema formado pelas equações (III.4-10) e (III.4-11), numa forma apropriada para resolução numérica.

Programas usados.

Fazendo

$$\ddot{A} = \frac{d^2 A}{dr^2}, \quad \dot{A} = \frac{dA}{dr}, \quad \ddot{K} = \frac{d^2 K}{dr^2}, \quad \dot{K} = \frac{dK}{dr}$$

temos

$$\ddot{A} = -K^{-1} \dot{K} \dot{A} + 4\pi\eta^2 \left[-4(X^2-1)^2 + 2\alpha^{-1} e^{2A} K^{-2} \dot{P}^2 \right],$$

e

$$\ddot{K} = 4\pi\eta^2 \left[-2e^{2A} K^{-1} \dot{P}^2 X^2 - 6K(X^2-1)^2 + \alpha^{-1} e^{2A} K^{-1} \dot{P}^2 \right].$$

Fazendo agora

$$X_1 = A$$

$$X_2 = K$$

$$X_3 = \dot{A} \longrightarrow \dot{X}_3 = \ddot{A}$$

$$X_4 = \dot{K} \longrightarrow \dot{X}_4 = \ddot{K},$$

temos para o sistema

$$\dot{X}_1 = X_3$$

$$\dot{X}_2 = X_4$$

$$\dot{X}_3 = -X_4 X_3 / X_2 + 4\pi\eta^2 \left[-4(X^2-1)^2 + \frac{2\alpha^{-1} e^{2X_1} \dot{P}^2}{X_2} \right]$$

$$\dot{X}_4 = 4\pi\eta^2 \left[-\frac{2e^{2X_1} \dot{P}^2 X^2}{X_2} - 6X_2(X^2-1)^2 + \frac{\alpha^{-1} e^{2X_1} \dot{P}^2}{X_2} \right],$$

onde P e X são dados no apêndice B.3.

As condições iniciais que empregamos são:

$$A(0,15) = A_0 = 0,30635$$

$$K(0,15) = K_0 = 1,0207$$

$$\dot{A}(0,15) = \dot{A}_0 = 0,67401$$

$$\dot{K}(0,15) = \dot{K}_0 = 0,33954$$

Para a resolução deste sistema de equações usamos os mesmos programas listados no apêndice A.3, porém com algumas adaptações. Neste caso empregamos apenas o método Runge - Kutta.

Como a solução para este sistema depende do valor da constante η , executamos o programa com quatro diferentes valores, a saber: $\eta = 0$, $\eta = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-3}$ e $\eta = 10^{-4}$. Observamos que o melhor resultado foi aquele encontrado para $\eta = 10^{-4}$.

A solução, nesse caso, é mostrada na figura 2.

Para valores de η menores que 10^{-4} , a solução do sistema aproxima-se da obtida quando $\eta = 0$.

Os polinômios obtidos são:

$$A(x) = 0,08699626 x^3 - 0,02305167 x^2 + 0,7191118 x + 0,1947617$$

e

$$K(x) = -0,339540 x + 1,071631.$$

O programa utilizado é dado a seguir

```

EXTERNAL F
REAL T,Y(4),TOUT,RELERR,ABSERR
REAL TFINAL,TPRINT,ECC,ALFA,ALFASQ,WORK(27)
INTEGER IWORK(5),IFLAG,NEQN
NEQN=4
T=0.15
Y(1)=0.30635
Y(2)=1.0207
Y(3)=0.67401
Y(4)=-0.33954
RELERR=1.0E-9
ABSERR=0.0
TFINAL=3.0
TPRINT=0.05
IFLAG=1
TOUT=T
10 CALL RKF45(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK,IWORK)
WRITE(1,11) T,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4)
GO TO (80,20,30,40,50,60,70,80),IFLAG
20 TOUT=T + TPRINT
IF(T.LT.TFINAL) GO TO 10
STOP
30 WRITE(1,31)RELERR,ABSERR
GO TO 10
40 WRITE(1,41)
GO TO 10
50 ABSERR=1.0E-9
WRITE(1,31) RELERR,ABSERR
GO TO 10
60 RELERR=10.0*RELERR
WRITE(1,31)RELERR,ABSERR
IFLAG=2
GO TO 10
70 WRITE(1,71)
IFLAG=2
GO TO 10
80 WRITE(1,81)
STOP

11 FORMAT(1X,F5.3,4E15.8)
31 FORMAT(17H TOLERANCES RESET,2E12.3)
41 FORMAT(11H MANY STEPS)
71 FORMAT(12H MUCH OUTPUT)
81 FORMAT(14H IMPROPER CALL)
END
SUBROUTINE F(T,Y,YP)
DIMENSION Y(4),YP(4)
F1=Y(1)
F2=Y(2)
F3=Y(3)
F4=Y(4)
YP(1)=F3
YP(2)=F4
YP(3)=- (F4*F3)/F2+12.57*(0.000000001)*(-4,*(0.0222475*(T**6)-
1 0.2331514*(T**5)+0.934866*(T**4)-1.711292*(T**3)+
2 1.134296*(T**2)+0.487107*T+0.2475376)**2-1)**2+
3 2.*EXP(2,*F1)*((0.066052*(T**4)-0.3444584*(T**3)+
4 0.6159171*(T**2)-0.427815*T-0.2796141)**2)/F2)
YP(4)=12.57*(0.000000001)*(-2,*EXP(2,*F1)*((0.0132104*(T**5)
5 -0.0861146*(T**4)+0.2053057*(T**3)-0.2139075*(T**2)

```

```

6  =0.2796141*T+1.07383)**2)*((0.0222475*(T**6)
7  =0.2331514*(T**5)+0.934866*(T**4)-1.711292*(T**3)
8  +1.134296*(T**2)+0.4857107*T+0.2475376)**2)/F2=
9  6.*F2*((0.0222475*(T**6)-0.2331514*(T**5)+
1  0.934866*(T**4)-1.711292*(T**3)+1.134296*(T**2)+
2  0.4857107*T+0.2475376)**2-1)**2+EXP(2.*F1)*
3  ((0.066052*(T**4)-0.3444584*(T**3)+0.6159171*
4  (T**2)-0.427815*T-0.2796141)**2)/F2)
RETURN
END

```


RESU - AJUSTAMENTO DE CURVAS

NO. COEF. = 4

NO. VAR. = 1

NO. PONTOS = 38

EXATID. = 0.10E-1

VALORES INICIAIS DOS COEFICIENTES C(K):

0.1000000E+01

0.1000000E+01

0.1000000E+01

0.1000000E+0

FUNCAO AJUSTADA (NAO-LINEAR): END

DESVIO MEDIO = 0.209

DESVIO PADRAO DE "Y" = 0.002

COEF. DE CORRELACAO = 0.99998644

COEF. NO.	COEF.	DESV. PADRAO	COEF T (COEF)
1	0.1947617E+00	0.3553774E-03	0.5480419E+03
2	0.7191118E+00	0.6481422E-03	0.1109497E+04
3	-0.2305107E-01	0.1322911E-02	0.1742495E+02
4	0.8699626E-01	0.2755853E-02	0.3156701E+02

X(I)	Y(I)	YC(I)	ERRO%
0.1500000E+00	0.3003500E+00	0.3024034E+00	-0.1268251E+01
0.2000000E+00	0.3403340E+00	0.3383500E+00	-0.5806100E+00
0.2500000E+00	0.3748970E+00	0.3744503E+00	-0.1170311E+00
0.3000000E+00	0.4100010E+00	0.4107695E+00	0.1727790E+00
0.3500000E+00	0.4458460E+00	0.4473570E+00	0.3369013E+00
0.4000000E+00	0.4822730E+00	0.4842859E+00	0.4173025E+00
0.4500000E+00	0.5193680E+00	0.5210216E+00	0.4339104E+00
0.5000000E+00	0.5571550E+00	0.5594292E+00	0.4081849E+00
0.5500000E+00	0.5956000E+00	0.5977741E+00	0.3549126E+00
0.6000000E+00	0.6349110E+00	0.6367214E+00	0.2851379E+00
0.6500000E+00	0.6749370E+00	0.6763304E+00	0.2073353E+00
0.7000000E+00	0.7157000E+00	0.7160844E+00	0.1375375E+00
0.7500000E+00	0.7574420E+00	0.7578305E+00	0.5129038E-01
0.8000000E+00	0.7999900E+00	0.7998402E+00	-0.1905082E-01
0.8500000E+00	0.8434500E+00	0.8421705E+00	-0.7901084E-01
0.9000000E+00	0.8878640E+00	0.8867107E+00	-0.1298924E+00
0.9500000E+00	0.9332720E+00	0.9317022E+00	-0.1602047E+00
1.0000000E+01	0.9797220E+00	0.9770101E+00	-0.1943320E+00
1.0500000E+01	0.1027260E+01	0.1025124E+01	-0.2079058E+00
1.1000000E+01	0.1075943E+01	0.1073604E+01	-0.2099402E+00
1.1500000E+01	0.1125023E+01	0.1123505E+01	-0.2005779E+00
1.2000000E+01	0.1176962E+01	0.1174831E+01	-0.1810607E+00
1.2500000E+01	0.1229420E+01	0.1227548E+01	-0.1527719E+00
1.3000000E+01	0.1283284E+01	0.1281700E+01	-0.1171013E+00
1.3500000E+01	0.1338013E+01	0.1337594E+01	-0.7609093E-01
1.4000000E+01	0.1395495E+01	0.1395005E+01	-0.3155470E-01
1.4500000E+01	0.1454021E+01	0.1454227E+01	0.1414053E-01
1.5000000E+01	0.1514287E+01	0.1515175E+01	0.5867420E-01
1.5500000E+01	0.1576401E+01	0.1577907E+01	0.9930950E-01
1.6000000E+01	0.1640480E+01	0.1642605E+01	0.1331901E+00
1.6500000E+01	0.1706052E+01	0.1709336E+01	0.1572094E+00
1.7000000E+01	0.1775057E+01	0.1776045E+01	0.1603341E+00
1.7500000E+01	0.1845854E+01	0.1846857E+01	0.1626971E+00
1.8000000E+01	0.1919213E+01	0.1921838E+01	0.1307579E+00
1.8500000E+01	0.1995329E+01	0.1997052E+01	0.8634370E-01
1.9000000E+01	0.2074417E+01	0.2074505E+01	0.7130144E-02
1.9500000E+01	0.2156717E+01	0.2154442E+01	-0.1054812E+00

RESO - AJUSTAMENTO DE CURVAS

O.COEFF.= 2 NO.VAR.= 1 NO.PONTOS= 28 EXATID.= 0.10E-04

ALORES INICIAIS DOS COEFICIENTES C(K):

0.1000000E+01 0.1000000E+01

UNCAO AJUSTADA (NAO-LINEAR): END

DESVIO MEDIO = 0.000

DESVIO PADRAO DE "Y"= 0.000

COEF. DE CORRELACAO = 1.00000000

COEF. NO.	COEF.	DESV. PADRAO (COEF)	COEF T (COEF)
1	0.1071631E+01	0.6174603E-09	0.1735546E+10	
2	-0.3395400E+00	0.1528778E-08	0.2220990E+09	

X(I)	Y(I)	YC(I)	EKR0%
0.1500000E+00	0.1020700E+01	0.1020700E+01	0.0000000E+00
0.2000000E+00	0.1003723E+01	0.1003723E+01	0.0000000E+00
0.2500000E+00	0.9807460E+00	0.9867460E+00	0.0000000E+00
0.3000000E+00	0.9697690E+00	0.9697690E+00	0.0000000E+00
0.3500000E+00	0.9527920E+00	0.9527920E+00	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.9358150E+00	0.9358150E+00	0.0000000E+00
0.4500000E+00	0.9188380E+00	0.9188380E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.9018610E+00	0.9018610E+00	0.0000000E+00
0.5500000E+00	0.8848840E+00	0.8848840E+00	0.0000000E+00
0.6000000E+00	0.8679070E+00	0.8679070E+00	0.0000000E+00
0.6500000E+00	0.8509300E+00	0.8509300E+00	0.0000000E+00
0.7000000E+00	0.8339530E+00	0.8339530E+00	0.0000000E+00
0.7500000E+00	0.8169760E+00	0.8169760E+00	0.0000000E+00
0.8000000E+00	0.7999990E+00	0.7999990E+00	0.0000000E+00
0.8500000E+00	0.7830220E+00	0.7830220E+00	0.0000000E+00
0.9000000E+00	0.7660450E+00	0.7660450E+00	0.9726035E-00
0.9500000E+00	0.7490680E+00	0.7490680E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.7320910E+00	0.7320910E+00	0.0000000E+00
0.1050000E+01	0.7151140E+00	0.7151140E+00	0.1041073E-05
0.1100000E+01	0.6981370E+00	0.6981370E+00	0.0000000E+00
0.1150000E+01	0.6811600E+00	0.6811600E+00	-0.1093000E-05
0.1200000E+01	0.6641830E+00	0.6641830E+00	0.0000000E+00
0.1250000E+01	0.6472060E+00	0.6472060E+00	0.0000000E+00
0.1300000E+01	0.6302290E+00	0.6302290E+00	0.1182202E-05
0.1350000E+01	0.6132520E+00	0.6132520E+00	0.0000000E+00
0.1400000E+01	0.5962750E+00	0.5962750E+00	-0.1249521E-05
0.1450000E+01	0.5792980E+00	0.5792980E+00	0.0000000E+00
0.1500000E+01	0.5623210E+00	0.5623210E+00	0.0000000E+00

APÊNDICE C

Apêndice C.1 - Demonstração da expressão (IV.1-2).

Dada a expressão

$$\nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) - T^{ab} \nabla_a \hat{\rho}_b = 0,$$

Temos que

$$\nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) = e^{-A/2} e^{-B/2} e^{-C/2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2} p_\rho) \right],$$

mas

$$A = B \quad e \quad e^{C/2} = e^{-A} H,$$

logo

$$\nabla_a (T^{ab} \hat{\rho}_b) = \frac{1}{H} \frac{d}{d\rho} (H p_\rho),$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_a \hat{\rho}_b &= + e^{-A/2} e^{-B/2} e^{-C/2} \left[\frac{d}{d\rho} (e^{A/2} e^{B/2} e^{C/2}) \right], \\ &= \frac{1}{H} \frac{dH}{d\rho}. \end{aligned}$$

Assim

$$T^{ab} \nabla_a \hat{\rho}_b = \frac{1}{H} p_\rho \frac{dH}{d\rho},$$

portanto

$$\frac{1}{H} \frac{d}{d\rho} (H p_\rho) - \frac{1}{H} p_\rho \frac{dH}{d\rho} = 0,$$

ou

$$\frac{d}{d\rho} p_p = 0,$$

ou ainda

$$\frac{d}{d\rho} p_p = \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - \bar{e}^c R^2 P^2 - 2\lambda (R^2 - \eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi q^2} \bar{e}^c \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right] \right\},$$

mas

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 = 2 \frac{dR}{d\rho} \frac{d^2 R}{d\rho^2},$$

$$\frac{d}{d\rho} (\bar{e}^c R^2 P^2) = -\bar{e}^c R^2 P^2 \frac{dC}{d\rho} + 2\bar{e}^c R^2 P \frac{dP}{d\rho} + 2\bar{e}^c R P^2 \frac{dR}{d\rho},$$

$$\frac{d}{d\rho} [2\lambda (R^2 - \eta^2)^2] = 8\lambda R (R^2 - \eta^2) \frac{dR}{d\rho},$$

e

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{4\pi q^2} \bar{e}^c \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4\pi q^2} \bar{e}^c \frac{dC}{d\rho} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{2\pi q^2} \bar{e}^c \frac{dP}{d\rho} \frac{d^2 P}{d\rho^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} p_p &= \frac{dR}{d\rho} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \bar{e}^c R^2 P^2 \frac{dC}{d\rho} - \bar{e}^c R^2 P \frac{dP}{d\rho} - \bar{e}^c R P^2 \frac{dR}{d\rho} - \\ &\quad - 4\lambda R (R^2 - \eta^2) \frac{dR}{d\rho} - \frac{1}{8\pi q^2} \bar{e}^c \frac{dC}{d\rho} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 + \frac{\bar{e}^c}{4\pi q^2} \frac{dP}{d\rho} \frac{d^2 P}{d\rho^2}, \\ &= \frac{dR}{d\rho} \left[\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \bar{e}^c R P^2 - 4\lambda R (R^2 - \eta^2) \right] + \frac{1}{2} \bar{e}^c R^2 P^2 \frac{dC}{d\rho} + \\ &\quad + \bar{e}^c \frac{dP}{d\rho} \left[\frac{1}{4\pi q^2} \frac{d^2 P}{d\rho^2} - R^2 P - \frac{1}{8\pi q^2} \frac{dC}{d\rho} \frac{dP}{d\rho} \right]. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} - R \left[4\lambda(R^2 - \eta^2) + \bar{e}^c \rho^2 \right] = - \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho},$$

e

$$\frac{1}{4\pi g^2} \frac{d^2 P}{d\rho^2} - R^2 P = - \frac{1}{8\pi g^2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} p_\rho &= \frac{dR}{d\rho} \left[- \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (A+B+C) \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{2} \bar{e}^c R^2 \rho^2 \frac{dC}{d\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{e}^c \frac{dP}{d\rho} \left[- \frac{1}{8\pi g^2} \frac{d}{d\rho} (A+B-C) \frac{dP}{d\rho} - \frac{1}{8\pi g^2} \frac{dP}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} \right] \right]. \end{aligned}$$

Como $A = B$ e somando e subtraindo o termo

$$4\lambda(R^2 - \eta^2) \frac{dA}{d\rho}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} p_\rho &= - \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + 4\lambda(R^2 - \eta^2)^2 \right] \frac{dA}{d\rho} - \left[- 4\lambda(R^2 - \eta^2)^2 + \frac{\bar{e}^c}{4\pi g^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \right] \frac{dA}{d\rho} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - \bar{e}^c R^2 \rho^2 \right] \frac{dC}{d\rho}. \end{aligned}$$

Mas

$$\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 + 4\lambda(R^2 - \eta^2)^2 = \sigma - p_\phi,$$

$$- 4\lambda(R^2 - \eta^2)^2 + \frac{\bar{e}^c}{4\pi g^2} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 = p_\phi + p_\rho,$$

e

$$\left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 - \bar{e}^c R^2 \rho^2 = p_\rho - p_\phi,$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho} p_p &= -(\sigma + p_\phi) \frac{dA}{d\rho} - (p_p + p_\phi) \frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{2}(p_p - p_\phi), \\ &= -\sigma \frac{dA}{d\rho} + p_\phi \frac{dA}{d\rho} - p_p \frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{2} p_p \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{2} p_\phi \frac{dC}{d\rho}, \\ &= p_\phi \left(\frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} \right) - p_p \left(\frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} \right) - (\sigma + p_\phi) \frac{dA}{d\rho}.\end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dC}{d\rho} = \frac{1}{H} \frac{dH}{d\rho},$$

logo

$$\frac{d}{d\rho} p_p = p_\phi \frac{1}{H} \frac{dH}{d\rho} - p_p \frac{1}{H} \frac{dH}{d\rho} - (\sigma + p_\phi) \frac{dA}{d\rho},$$

ou

$$\frac{1}{H} \frac{d}{d\rho} (H p_p) - p_\phi \frac{1}{H} \frac{dH}{d\rho} + (\sigma + p_\phi) \frac{dA}{d\rho} = 0.$$

Multiplicando os termos dessa expressão por H obtemos,

$$\frac{d}{d\rho} (H p_p) - p_\phi \frac{dH}{d\rho} + (\sigma + p_\phi) H \frac{dA}{d\rho} = 0.$$

que é a expressão (IV.1-2).

Apêndice C.2 - Demonstração da expressão (IV.2-5)

Usando as equações (IV.1-3), (IV.1-4), (IV.1-5) e (IV.1-10) teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\rho^2}(\bar{e}^A H) &= \frac{d}{d\rho} \left[\bar{e}^A \frac{dH}{d\rho} - \bar{e}^A H \frac{dA}{d\rho} \right] = \frac{d}{d\rho} \left[\bar{e}^A (\theta_2 - \theta_1) \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[\frac{d\theta_2}{d\rho} - \frac{d\theta_1}{d\rho} - \theta_1 \bar{H}' (\theta_2 - \theta_1) \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[\frac{d\theta_2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{d\rho} - \theta_1 \bar{H}' \theta_2 + \frac{3}{4} \bar{H}' \theta_1^2 + \frac{1}{4} \bar{H}' \theta_1^2 \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[\frac{d\theta_2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{d\rho} - \bar{H}' \theta_1 (\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1) + \frac{1}{4} \bar{H}' \theta_1^2 - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{d\rho} \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[4\pi H (-2\sigma + 3p_\rho + p_\phi) - \frac{1}{2} 8\pi H (p_\rho + p_\phi) - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{H}' \theta_1 (\theta_2 - \frac{3}{4} \theta_1) + \frac{1}{4} \bar{H}' \theta_1^2 - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{d\rho} \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[4\pi H (-2\sigma + 3p_\rho + p_\phi) - 4\pi H (p_\rho - p_\phi) - 8\pi H p_\rho - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_1}{d\rho} - \bar{H}' \theta_1^2 \right) - \frac{1}{4} \bar{H}' \theta_1^2 \right], \\
 &= \bar{e}^A \left[-8\pi H \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_1}{d\rho} - \frac{1}{H} \theta_1^2 \right) - \frac{1}{4} H \left(\frac{dA}{d\rho} \right) \right], \\
 &= -8\pi \bar{e}^A H \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_1}{d\rho} \bar{e}^A - \bar{e}^A \theta_1 \frac{dA}{d\rho} \right) - \frac{1}{4} H \bar{e}^A \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\bar{e}^{-A}H) = -8\tilde{\eta}\bar{e}^{-A}H\bar{v} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(\bar{e}^{-A}\Theta_1) - \frac{1}{4}\bar{e}^{-A}H\left(\frac{dA}{d\rho}\right)^2,$$

que é a expressão (IV.2-5).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | DIRAC, P.A.M., Phys.Rev. 74, 817, (1948)
- | 2 | NAMBU, Y., Phys.Rev. D12, 4262, (1974)
- | 3 | ZELDOVICH, Ya.B. Mon. Not.R.Astron.Soc., 192, 663, (1980)
- | 4 | VILENKIN, A., Phys.Rev. D23, 852 (1981)
- | 5 | KIBBLE, T.W.B.; LAZARIDES, G.; SHAFI, Q., Phys.Lett. 113B, 237, (1982)
- | 6 | VILENKIN, A., Phys. Rep. 121, 263, (1984)
- | 7 | VILENKIN, A.; FORD, L.H., J. Phys, A14, 2353, (1981)
- | 8 | GARFINKLE, D., Phys.Rev. D23, 1323, (1985)
- | 9 | TIAN, Q, Phys.Rev. D33, 3549, (1986)
- | 10 | GOTT III, J.R., Astrof. J., 288, 422, (1985)
- | 11 | BJORKEN, J.D.; DRELL, S.D., Relativistic Quantum Fields (Mc GrawHill), 1965.
- | 12 | WALD, R.M., General Relativity (University of Chicago Press, Chicago), 1984.
- | 13 | LANDAU, L; LIFSHITZ, E., Teoria de campos (Editora Mir, Moscou, 1980).
- | 14 | LAGUNA-CASTILHO, P.; MATZNER, R.A., Phys.Rev. D 36, (a ser publicado).
- | 15 | LAGUNA-CASTILHO, P.; MATZNER, R.A., Phys, Rev. D 36. 2933, (1987).
- | 16 | KAISER, N.; STEBBINS, A., NATURE 310, 391, (1984).